

# INTERPRETACIÓN DE LAS PROBABILIDADES CONTENIDAS EN LAS REJILLAS BINOMIALES, LAS OPCIONES REALES Y EL VAN Aplicaciones a opciones reales y empresas de base tecnológica

**Carlos Alberto Ferreira**  
**Gastón S. Milanesi**

*Universidad Nacional del Sur*

*SUMARIO: 1. Introducción; 2. El modelo; 3. Análisis de un caso: flexibilidad estratégica en un proyecto de inversión de base tecnológica, la opción de diferir y abandonar; 4. Una nota: diferencias entre las probabilidades objetivas y probabilidades neutrales al riesgo; 5. El Valor Actual Neto; 6. Problemas que presenta el enfoque del Valor Actual Neto y la valuación de la flexibilidad estratégica; 7. Conclusiones.*

Para comentarios: [ferreira@uns.edu.ar](mailto:ferreira@uns.edu.ar), [milanesi@uns.edu.ar](mailto:milanesi@uns.edu.ar)

**Resumen.** El trabajo presenta un modelo para valorar decisiones de inversión aplicando la Teoría de Opciones Reales. Propone el uso de probabilidades “*del mundo real*” en contraposición a los clásicos coeficientes equivalentes ciertos. El método describe y traduce “*con un mayor grado de intuición*”, la anatomía del riesgo correspondiente a la flexibilidad estratégica del activo. Adicionalmente, la estimación de coeficientes no emplea el tipo sin riesgo. En cambio emplea tasas estimadas a través de los tradicionales modelos de equilibrio, modelos que incorporan momentos de orden superior, o simples ajustes *ad-hoc* sobre la tasa. Finalmente demuestra la convergencia entre la Teoría de Opciones Reales y el Valor Actual Neto.

## 1. Introducción

Tradicionalmente las decisiones de inversión son evaluadas utilizando el método conocido como descuento de flujos de fondos (DFF) aplicando la tradicional formulación del valor actual neto (VAN) (Copeland, T- Koller, T- Murrin, J, 2000). La incertidumbre del proyecto se incorpora a través de una tasa ajustada por riesgo, la cual se supone constante o variable en forma determinística durante la vida del proyecto. Este método presenta la desventaja de no capturar flexibilidad estratégica alguna del proyecto (Wang, A-Halal, W, 2010).

Los cursos alternativos de acción y variabilidad del riesgo en el tiempo, en inversiones de activos reales se detectada y cuantificada mediante la Teoría de Opciones Reales (OR). El enfoque nace como adaptación del modelo de valoración de opciones financieras (Black, F- Scholes, M, 1973) (Merton, R, 1973) para el caso de activos reales. El primer planteo se desarrolla en la concepción de un modelo para la opción estratégica de crecimiento de la empresa (Myers, 1977). A partir de allí se elaboraron diferentes propuestas analíticas para el análisis de categorías específicas de opciones, entre ellos: (a) Opción de Diferimiento (Mc Donal, R - Siegel, J, 1986), (Paddock, J-Siegel, D-Smith, J, 1988); (Ingersoll, J- Ross, S, 1992); (b) Opción de Crecimiento (Trigeorgis, 1988); (Pindyck, 1988), (Smit, 1996); (c) Opción de Abandono (Myers, S- Majd, S, 1990); (d) Opciones de expandir-contrair o extensión de la vida útil (Trigeorgis, L- Mason, S, 1987); (Keema, 1988); (e) Opción de cierre temporario o corte del proceso productivo (Brennam, M- Schwartz, E, 1985); (Brennan, M- Schwartz, E, 1985); (f) Opción de intercambio (Margrabe, 1978); (Kulatilaka, 1988); (Kulatilaka, 1995); (g) Opciones financieras de insolvencia (Mason, S- Merton, R, 1985); (Trigeorgis, 1993). La ecuación de Black-Scholes fue derivada empleando cálculo diferencial estocástico. Las matemáticas involucradas requieren conocimientos de cálculo estocástico y ecuaciones diferenciales. Cox, Ross y Rubinstein destilaron los principales conceptos de valoración de opciones en un sencillo algoritmo requiriendo solamente sumas, restas, multiplicación y (dos veces) divisiones ((Wilmott, P, 2009). En este caso se emplean intervalos temporales discretos a través del uso de árboles o grillas binomiales y métodos de simulación (Cox, J- Ross, S, 1976); (Cox, J- Ross, S-Rubinstein, M, 1979); (Luherman, T, 1998); (Copeland, T- Antikarov, V, 2001); (Borison, 2003); (Smith, 2005).

En el presente trabajo se propone una alternativa al clásico método de Cox, Ross y Rubinstein, 1979 (en adelante CRR) para valorar la flexibilidad estratégica contenida en las decisiones de inversión, siguiendo la propuesta de (Arnold; T-Crack, T, 2003); (Arnold, T-Crack, T, 2004). Ambos enfoques son consistentes en cuanto a resultados, pero el uso por el segundo de probabilidades “*del mundo real*” tiene mayor eficacia comunicacional e interpretativa de la anatomía del riesgo contenida en los nodos finales de la rejilla. Para la estimación del valor esperado del subyacente, son utilizadas tasas obtenidas a partir de modelos de equilibrio, modelos que incorporan momentos estocásticos de orden superior, o simples ajustes *ad-hoc* las tasas de crecimiento indicadas.

## 2. El modelo

El valor actual de un activo real es expresado por las siguientes variables:  $V_t$ , valor del bien al momento  $t$ ,  $K_s$ , el rendimiento<sup>1</sup> (o crecimiento) compuesto del valor del subyacente desde el instante 0 a  $T$ ,  $R_f$  factor actualización (capitalización) sin riesgo ( $1+r_f$ ) y  $E(.)$  operador de expectativa. A partir del valor esperado del activo (Ec.1) se deriva el valor actual del mismo (Ec.2 y Ec.3).

<sup>1</sup> La tasa ajustada por riesgo ( $K_s$ ) se estima empleando modelos de equilibrio (*Capital Assets Pricing Model* (CAPM); *Arbitrage Price Theory* (APT); *Multifactor Pricing Model* (MFPM); incorporando momentos estocásticos superiores (*Downside CAPM*; *Conditional Moment CAPM*), o sencillamente estimaciones *ad-hoc* de la evolución del subyacente.

$$V_0 E(K_s) = E(V_T) \text{ (Ec. 1)}$$

$$\Rightarrow V_0 [R_f + (E(K_s) - R_f)] = E(V_T) \text{ (Ec. 2)}$$

$$\Rightarrow V_0 = \frac{E(V_T) - V_0 [E(K_s) - R_f]}{R_f} \text{ (Ec. 3)}$$

Para valuar la flexibilidad estratégica del proyecto es menester aplicar la Teoría de Opciones Financieras. El ratio delta ( $\Delta$ ) para una opción de compra<sup>2</sup> está definido por la siguiente ecuación;

$$\Delta = \frac{\Delta S}{C} = \frac{S_0 (V_u - V_d)}{V_0 (u - d) S_0} = \frac{(V_u - V_d)}{V_0 (u - d)} \text{ (Ec. 4)}$$

donde  $\Delta = \frac{(V_u - V_d)}{S_0 (u - d)}$  expresa movimientos multiplicativos de ascenso ( $u$ ) y descenso ( $d$ ) de ( $S$ ) y

la elasticidad del valor del subyacente en relación al derivado. Incorporando la ecuación 4 en la ecuación 3 se obtiene la expresión correspondiente al valor actual de un activo real,

$$V_0 = \frac{E(V_T) - V_0 \Delta [E(K_s) - R_f]}{R_f} \text{ (Ec. 5)}$$

$$\Rightarrow V_0 = \frac{E(V_T) - \frac{(V_u - V_d)}{(u - d)} [E(K_s) - R_f]}{R_f} \text{ (Ec. 6)}$$

Los movimientos de ascenso  $u = \ell^{\sigma\sqrt{T}}$  y descenso  $d = \ell^{-\sigma\sqrt{T}}$  son derivados mediante el modelo CRR, donde  $\sigma$  representa la volatilidad del subyacente. Reordenando la expresión anterior, la valuación de un nodo específico correspondiente a la rejilla binomial es la siguiente;

$$\ell^{-r_f T} \left[ E(V_t) - \frac{V_u - V_d}{\ell^{\sigma\sqrt{T}} - \ell^{-\sigma\sqrt{T}}} (\ell^{kT} - \ell^{r_f T}) \right] \text{ (Ec. 7)}$$

Los tradicionales coeficientes equivalentes ciertos (modelo CRR), son obtenidos suponiendo que la tasa de crecimiento del subyacente es el tipo sin riesgo,

$$p_n \equiv \left( \frac{\ell^{r_f T} - d}{u - d} \right) \text{ (Ec. 8)}$$

El enfoque propuesto emplea probabilidades “del mundo real”. Estas son obtenidas sustituyendo el tipo sin riesgo de la ecuación anterior, por la tasa ajustada por riesgo o tasa de evolución del subyacente ( $K_t$ ),

$$p \equiv \left( \frac{\ell^{kT} - d}{u - d} \right) \text{ (Ec. 9)}$$

Finalmente, el valor del activo es calculado resolviendo recursivamente la rejilla binomial. El valor de la opción  $V_{ij}$  para  $n$  nodos aplicando coeficientes equivalentes ciertos (modelo CRR) es;

<sup>2</sup> En una opción de venta el ratio se plantea como  $\Delta S/P$  siendo similar a la opción de compra.

$$V(i, j) = \ell^{-r_f T} \left[ p_n V_{(i+1, j)} + (1 - p_n) V_{(i, j+1)} \right] \quad (\text{Ec. 10})$$

siendo  $i$  el número de movimientos ascendentes y  $j$  el número de movimientos descendentes para el estadio " $i+j$ " (donde  $i+j$  es menor a el estadio terminal). Utilizando las probabilidades del "*mundo real*" (Ec. 9) y la valoración de un nodo (Ec. 7), la expresión general es,

$$V(i, j) = \ell^{-r_f T} \left\{ \left[ p V_{(i+1, j)} + (1 - p) V_{(i, j+1)} \right] - \left( \frac{V_{(i+1, j)} - V_{(i, j+1)}}{\ell^{\sigma\sqrt{T}} - \ell^{-\sigma\sqrt{T}}} \right) (\ell^{kT} - \ell^{r_f T}) \right\} \quad (\text{Ec. 11})$$

### 3. Análisis de un caso: flexibilidad estratégica en un proyecto de inversión de base tecnológica, la opción de diferir y abandonar

A continuación se presenta un ejemplo para ilustrar la consistencia matemática entre los enfoques de probabilidades "del mundo real" versus probabilidades equivalentes ciertas (CRR) y las ventajas derivadas del primero.

Se supone que un grupo de investigadores académicos especializados en nanotecnología de minicomponentes electrónicos destinados a la medicina, evalúa la estrategia de fabricar a escala prototipos de microcomponente para prótesis. Estos poseen notables mejoras tecnológicas respecto de sus rivales y son elaborados en el mercado local. La financiación, por partes iguales, será provista por un consorcio integrado por inversores privados (venture capital) y como contraparte el costo de oportunidad que representa el trabajo derivado del equipo de investigadores. El proyecto tiene desventajas competitivas dadas por bajas barreras de entrada ya que introducido el producto, la tecnología puede ser imitada en el corto plazo por potenciales y actuales competidores. Adicionalmente tiene altas barreras de salida, es decir, realizada la inversión en planta y equipo, la misma es irreversible y presenta la dificultad de enajenación de los activos fijos habida cuenta la especificidad del producto.

Considerando las bajas y altas barreras de entrada y salida los estudios de mercado, técnico y económico arrojan un valor para la inversión inicial en activos fijos y capital de trabajo (I) de 300 millones de pesos. El valor actual de los flujos derivado de los fondos operativos del proyecto VA(FF) es de 150 millones. El resultado obtenido aplicando el tradicional criterio de elección conduce al rechazo del proyecto, ya que su valor actual neto (VAN) es de -150 millones [VA(FF) - I]. En términos estratégicos el resultado se genera debido las escasas barreras de ingreso en el mercado (no se adquiere la exclusividad de fabricación, atentando contra la viabilidad económica del proyecto).

Una estrategia alternativa consiste en diferir la inversión, producción y comercialización del producto con el objetivo de recolectar mayor información del potencial mercado, y aminorar la incertidumbre inicial. En términos estratégicos se crea una barrera temporal de entrada (licencia para diferir la producción y reserva de derechos de exclusividad).

Concretar el curso de acción precedente requiere patentar el prototipo y adquirir una licencia de exclusividad en la explotación. Con esto se reserva la opción de esperar (diferir) la inversión aguardando nueva información sobre la evolución del mercado. El costo total de los gastos de desarrollo y la licencia (incluidos tasas, derechos y honorarios profesionales en las actuaciones ante organismo pertinentes) es de 10 millones. El plazo de exclusividad y diferimiento de la inversión (Ia) se extiende hasta el cuarto periodo. La inversión se concretará si el valor actual de los flujos de fondos operativos supera los desembolsos requeridos para su producción a escala comercial. El valor de la inversión para el quinto periodo se incrementa respecto de la original (como consecuencia de un incremento esperado de los costos de producción) ascendiendo su valor a 600 millones de pesos. En términos de opciones financieras, el emprendimiento posee una opción de compra europea para producir y comercializar el producto a escala comercial diferiendo la inversión al periodo quinto.

Para permitir la aplicación de la Teoría de Opciones se supone que el mercado financiero debe ser completo, en el sentido de que cualquier flujo de fondos y riesgo pueda ser replicado por diferentes combinaciones de activos (carteras de arbitraje). La consecuencia inmediata de ello reside en que todo activo real tiene un activo financiero gemelo (acción) cuyos movimientos se encuentran correlacionados perfectamente con los flujos del proyecto. A partir del activo financiero se infiere la volatilidad del proyecto de inversión ( $\sigma$ ), esta última es el insumo para estimar movimientos de ascenso (u) y descensos (d) del proceso estocástico discreto (binomial) de los flujos de fondos del proyecto. Dado que los mercados son imperfectos e incompletos no todas las inversiones en activos reales poseen una acción gemela. Esta situación se profundiza para emprendimientos tecnológicos donde el capital en juego no hace oferta pública en el mercado financiero, hecho que cobra relevancia en economías emergentes. En estos casos la solución viene de la mano del método MAD (Marketed Asset Disclaimer) (Copeland, T- Antikarov, V, 2001). Primero se calcula el valor actual de los flujos de fondos, asumiéndose este como el verdadero valor de mercado o precio de transferencia en el caso de venta del proyecto en marcha. Paso seguido el VAN obtenido es simulado aplicando el método Monte Carlo, suponiéndose distribución normal de probabilidad de los valores del VAN. De la simulación se obtienen los parámetros de la distribución de frecuencia, entre ellos la volatilidad del VAN ( $\sigma$ ).

En el ejemplo propuesto se aplicó el método MAD sobre el valor actual de los flujos positivos cuyo valor en  $t=0$  es de \$150. Como resultado la volatilidad asociada ( $\sigma$ ) es del 60%, el proceso estocástico del subyacente (flujos de fondos operativos) se supone geométrico browniano (GMB). La tasa de crecimiento esperada ( $K_s$ ) de los flujos de fondos es del 18%, y el intervalo de tiempo es de  $\Delta t=1$ . El tipo sin riesgo ( $r_f$ ) es del 5%. Los movimientos de ascenso ( $u=e^{\sigma\sqrt{t}}$ ) y descenso ( $d=e^{-\sigma\sqrt{t}}$ ) son de 1,82 y 0,58 respectivamente.

En el cuadro 1 se presenta el proceso estocástico del flujo de fondos operativo para una rejilla de cinco periodos. Se exponen las probabilidades del “mundo real” ( $p$ ) y los coeficientes equivalentes ciertos ( $p_n$ ).

**Cuadro 1: Proceso estocástico flujo de fondos del proyecto**

0	1	2	3	4	5	$p$	$p_n$
\$ 150,00	\$ 273,32	\$ 498,02	\$ 907,45	\$ 1.653,48	\$ 3.012,83	3,42%	0,96%
	\$ 82,32	\$ 150,00	\$ 273,32	\$ 498,02	\$ 907,45	16,50%	7,34%
		\$ 45,18	\$ 82,32	\$ 150,00	\$ 273,32	31,81%	22,52%
			\$ 24,79	\$ 45,18	\$ 82,32	30,65%	34,55%
				\$ 13,61	\$ 24,79	14,77%	26,50%
					\$ 7,47	2,85%	8,13%

### 3.1. Probabilidades neutrales al riesgo (CRR)

El tradicional enfoque CRR requiere determinar los coeficientes equivalentes ciertos. Para ello se aplica la ecuación 8. Los valores obtenidos son  $p_n = 0,394$  y su complemento de  $(1-p_n)=0,6053$ . La determinación del valor terminal de la opción en el quinto periodo se realiza mediante la expresión  $V=Max [VA(FF)_4 - I_a ; 0]$ . Si el valor los flujos de fondos operativos es inferior a la inversión requerida no se ejerce la opción de producir a escala comercial y el único costo que se asume es el pago inicial de gastos de desarrollo y licencia (10 millones). En el caso de que el valor de los flujos excede la inversión requerida se ejerce la opción de producción. Aplicando resolución recursiva a través de la ecuación 10, se obtiene al valor actual de los flujos de fondos en el momento inicial ( $t=0$ ). En el cuadro 2 se expone la rejilla.

El valor actual del proyecto en  $t=0$  es de \$35,55. Claramente conviene llevar adelante la estrategia de desarrollo del prototipo y compra de la licencia; diferir la inversión y ejecutarla en  $t=4$ . Revelada la incertidumbre en último periodo, si el escenario es adverso no se ejerce el call y solamente se asume el costo de la licencia de diferir. Al ser el costo de la licencia inferior a los valores obtenidos por ambas estrategias (diferir e invertir), el valor actual neto de diferir como elemento condicionante de la ejecución del proyecto o su venta es de \$25,55 (millones) [ $\$35,55 - \$10$ ]. Si no se hubiese analizado la posibilidad de diferir el proyecto no se hubiese concretado en virtud a su valor actual neto negativo, ni eventualmente la venta del prototipo si los escenarios en los nodos finales no son favorables. En síntesis, si se sostiene que el valor expandido es la suma del valor tradicional estático (VAN) y el valor estratégico de las opciones (VAN estratégico) tenemos; VAN expandido de \$25,55 millones, que surge de sumar el VAN (-\$150 millones) y el VAN de las opciones reales del proyecto (\$175,55).

**Cuadro 2: Valuación mediante el modelo CRR (Cox-Ross-Rubinstein)**

0	1	2	3	4	5	prn
\$ 35,55	\$ 85,36	\$ 202,45	\$ 472,88	\$ 1.082,74	\$ 2.412,83	0,96%
	\$ 6,10	\$ 16,26	\$ 43,32	\$ 115,40	\$ 307,45	7,34%
		\$ -	\$ -	\$ -	\$ -	22,52%
			\$ -	\$ -	\$ -	34,55%
				\$ -	\$ -	26,50%
					\$ -	8,13%

### 3.2. Probabilidades objetivas (AC)

A diferencia del caso anterior se propone aplicar probabilidades correspondientes al “*mundo real*”. Estas surgen de aplicar la ecuación 9, y sus valores son de  $p=0,509$  y  $(1-p)=0,4907$ . Nuevamente la determinación del valor terminal de la opción ( $t=5$ ) se realiza mediante la expresión  $V=Max [VA(FF)_4 - I_a ; 0]$ . Resolviendo recursivamente y aplicando la ecuación 11 se tiene la rejilla del Cuadro 3.

**Cuadro 3: Valuación mediante el modelo de AC (Arnold-Crack)**

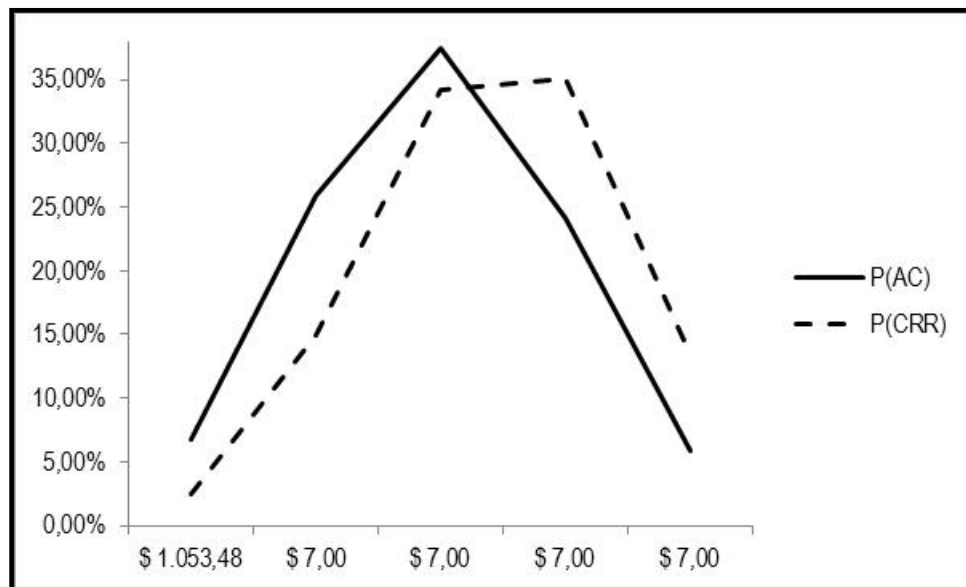
0	1	2	3	4	5	p
\$ 35,55	\$ 85,36	\$ 202,45	\$ 472,88	\$ 1.082,74	\$ 2.412,83	3,42%
	\$ 6,10	\$ 16,26	\$ 43,32	\$ 115,40	\$ 307,45	16,50%
		\$ -	\$ -	\$ -	\$ -	31,81%
			\$ -	\$ -	\$ -	30,65%
				\$ -	\$ -	14,77%
					\$ -	2,85%
						<b>Probabilidad éxito</b>
						<b>19,92%</b>

El resultado del presente enfoque es consistente con el tradicional enfoque binomial de Cox, Ross & Rubinstein. Sin embargo las probabilidades “*del mundo real*” logran una mejor interpretación de la anatomía del riesgo del proyecto y probabilidades de suceso asociada a los nodos finales. Además se incorporan las tasas estimadas de evolución del valor del subyacente en base

a tradicionales modelos de equilibrio, modelos que incorporan momentos estocásticos de orden superior, o estimaciones *ad-hoc* de la evolución del subyacente.

En el ejemplo las probabilidades acumuladas de invertir, producir y comercializar el prototipo (ejercicio del *call*) es de 19,92% en  $t=5$ . El valor surge de sumar las probabilidades de ocurrencia correspondiente a los escenarios donde el proyecto toma valor positivo. En los estadios  $p^5$  (cinco escenarios positivos) y  $(1-p)xp^4$  (un escenario negativo y cuatro positivos) el valor del proyecto es positivo. En el resto de los nodos terminales no se ejerce la opción con probabilidad acumulada del 80,08%.

**Ilustración 1: Función probabilidades objetivas  $P(AC)$  y neutrales al riesgo  $P(CRR)$**



Para determinar los rendimientos periódicos correspondientes a cada estadio se aplica la siguiente expresión

$$IRR = LN \left[ \frac{V_{i+1}(u)p + V_{j+1}(d)1-p}{V_i} \right] \text{ (Ec. 12)}$$

**Cuadro 4: Tasa de actualización por nodos**

0	1	2	3	4
26,76%	26,34%	25,81%	25,13%	24,23%
	30,50%	30,50%	30,50%	30,50%

Se puede apreciar que las tasas de actualización por periodo, varían replicando la flexibilidad estratégica del proyecto. El cuadro pone de manifiesto el clásico error en el cual se incurre cuando se evalúa una decisión de inversión empleando una tasa ajustada por riesgo estática para toda la vida del proyecto (Milanesi, G- Vigier, H, 2010).

#### 4. Una nota: diferencias entre las probabilidades objetivas y probabilidades neutrales al riesgo

En el enfoque de probabilidades neutrales al riesgo ( $p_n$ ), los valores de la probabilidad final son inferiores a los arrojados por las probabilidades objetivas ( $p$ ). En el ejemplo la probabilidad objetiva de continuar con la inversión, en  $t=5$  es del 19,92% versus el 8,3% de probabilidad neutral al riesgo. Para escenarios adversos la probabilidad objetiva de abandono asciende a 80,08% en contra 91,7% de probabilidad neutral al riesgo. Los guarismos indicados solo presentan diferencias relacionadas con las variables empleadas y de orden expositivo, no obstante arriban al mismo resultado. En el enfoque de probabilidades neutrales al riesgo la tasa de crecimiento es al tipo sin riesgo ( $r_f$ ); al utilizar probabilidades objetivas se utiliza la tasa ajustada por riesgo ( $k$ ). La explicación intuitiva reside en que las probabilidades neutrales al riesgo incorporan el ajuste en los flujos mientras que la probabilidades objetivas introducen el castigo por riesgo en el factor de descuento. La consecuencia de la aseveración anterior consiste en que las probabilidades objetivas en estado positivos son mayores que los coeficientes equivalentes ciertos [ $p > p_n$ ], en el ejemplo [ $0,509 > 0,394$ ]. Para estados adversos al éxito, los valores correspondientes a probabilidades objetivas son inferiores que los coeficientes equivalentes ciertos [ $(1-p) < (1-p_n)$ ], [ $0,4907 < 0,653$ ]. Por lo tanto los flujos de fondos equivalentes ciertos  $ec(ff)$  son menores que los flujos de fondos esperados  $E(ff)$ . Para los primeros la tasa de actualización es el tipo sin riesgo (ecuación 2) y para los segundos es la tasa ajustada por riesgo (ecuación 1).

#### 5. El Valor Actual Neto

En el cuadro 3 se presenta el valor actual neto de las opciones del proyecto desagregando los caminos dentro de la rejilla binomial que no conducen a un valor de cero. Un solo camino conduce al nodo de mayor valor (\$2.412,83) pero cinco caminos diferentes arriban al segundo nodo de valor (\$307,45). En el análisis tradicional del Valor Actual Neto simplemente se deben actualizar los flujos de fondos empleando las tasas de descuento adecuadas y multiplicarlas por las probabilidades objetivas. Se debe ser cuidadoso al estimar la tasa ajustada por riesgo, debido a que esta no es simplemente aquella para proyectos por riesgo equivalente que no tiene en cuenta la flexibilidad estratégica (Copeland, T- Tufano, P, 2004). El factor de actualización surge de estimar las diferentes tasas (ecuación 12) según los diferentes flujos en relación a los caminos alternativos que conduce a l nodo final.

**Cuadro 5: FV (Valor Final); Descuento desagregado por recorrido, factor de descuento y PV (Valor Presente)**

FV	Descuento por recorrido	Descuento	PV
\$ 2.412,83	$\exp(-(-26,76\%+26,34\%+25,81\%+25,13\%+24,23\%))$	27,731%	\$ 669,09
\$ 307,45	$\exp(-(-26,76\%+26,34\%+25,81\%+25,13\%+24,23\%))$	27,731%	\$ 85,26
\$ 307,45	$\exp(-(-26,76\%+30,50\%+30,50\%+30,50\%+30,50\%))$	22,592%	\$ 69,46
\$ 307,45	$\exp(-(-26,76\%+26,34\%+30,50\%+30,50\%+30,50\%))$	23,553%	\$ 72,41
\$ 307,45	$\exp(-(-26,76\%+26,34\%+25,81+30,50\%+30,50\%))$	24,684%	\$ 75,89
\$ 307,45	$\exp(-(-26,76\%+26,34\%+25,81+25,13\%+30,50\%))$	26,045%	\$ 80,07

Para los dos nodos finales donde se ejerce la opción se procede a estimar las tasas de actualización. En el nodo superior solamente existe un único factor de actualización asociado al único recorrido (27,31%). En el nodo inferior se presentan cinco caminos posibles, por lo tanto se de-



ben estimar cinco tasas diferentes de actualización (27,31%; 22,59%; 23,55%; 24,68%; 26,04%).

**Cuadro 6: PV (Valor Presente), P(X) (Probabilidades Objetivas); Q (Probabilidades objetivas sobre los caminos), PV x Q (Valor Actual ponderado por la probabilidad)**

	PV	P(x)	Q	PV*Q
\$	669,09	3,42%	3,42%	\$ 22,91
\$	85,26	16,50%	3,30%	\$ 2,81
\$	69,46	16,50%	3,30%	\$ 2,29
\$	72,41	16,50%	3,30%	\$ 2,39
\$	75,89	16,50%	3,30%	\$ 2,50
\$	80,07	16,50%	3,30%	\$ 2,64
			<b>VAN</b>	<b>\$ 35,55</b>

En el cuadro 6 se presenta el valor presente ajustado por las probabilidades Q. Estas son obtenidas aplicando la siguiente ecuación;

$$Q = \frac{p}{n!} \frac{1}{j!(n-j)!} \quad (\text{Ec. 13})$$

En este caso  $p$  representa las probabilidades objetivas (3,42% para el nodo superior y 16,50% para el nodo siguiente);  $n$  es la cantidad de pasos y  $j$  la cantidad de sucesos. El Valor Actual Neto es de \$25,55 millones (\$35,55-\$10).

## 6. Problemas que presenta el enfoque del Valor Actual Neto y la valuación de la flexibilidad estratégica

Tasas de actualización: Aplicar el enfoque del valor actual neto implica conocer las tasas de actualización vinculadas a los caminos que conducen a nodos finales. Para ello se debe aplicar el enfoque de opciones reales, ya sea trabajando con probabilidades neutrales al riesgo o probabilidades objetivas. Por lo tanto aplicar la técnica del Valor Actual Neto resulta redundante, puesto que primero se deben estimar las tasas (ecuación 12, cuadro 4) mediante la técnica de opciones reales.

Problemas computacionales: En el caso del ejemplo el árbol de decisión tiene cinco caminos diferentes que forman el valor del segundo nodo final;  $\binom{5}{4} = 5$ . En el caso de que todos los nodos

tuviesen valor entonces la cantidad de combinaciones serían  $\sum_{h=1}^5 \binom{5}{h} = 2^5 = 32$ . Si se em

plea una rejilla binomial con 10 pasos tendríamos  $\sum_{h=1}^{10} \binom{10}{h} = 2^{10} = 1024$ .

Desagregar cada uno de los caminos y estimar la tasa correspondiente no es práctico. Un atajo consiste en resolver estimando una única tasa ajustada por riesgo que iguala el valor presente (obtenido mediante la técnica de opciones) con el valor final en cada nodo. Aquí el factor de

descuento se transforma en un promedio que sobre descuenta la opción en el dinero y sub descuenta la opción fuera del dinero.

## 7. Conclusiones

Se demuestra la consistencia y convergencia de resultados entre equivalentes ciertos y probabilidades objetivas “*del mundo real*”. El último permite una interpretación más intuitiva de las probabilidades de suceso asociadas a la flexibilidad estratégica de la inversión. Adicionalmente las probabilidades “*del mundo real*” permiten estimar coeficientes utilizando tasas ajustadas por riesgo determinadas con los clásicos modelos de equilibrio (*Capital Assets Pricing Model* (CAPM); *Arbitrage Price Theory* (APT); *Multifactor Pricing Model* (MFPM); modelos donde se incorporan momentos estocásticos superiores (Downside CAPM; Conditional Moment CAPM), o sencillamente estimaciones *ad-hoc* de la evolución del subyacente como en el ejemplo del trabajo.

Si el único objetivo es valorar y se supone normalidad en el comportamiento del subyacente probablemente el enfoque de probabilidades neutral al riesgo sea el más indicado debido a que alterando las probabilidades (neutrales al riesgo), la técnica permite emplear la misma tasa para todos los recorridos del proyecto (el tipo sin riesgo). Por el contrario si se pretende emplear tasas ajustadas por riesgo (que incorporen momentos de orden superior o sencillamente tasas *ad-hoc*), el enfoque del Valor Actual Neto presenta referencias circulares en la estimación de las tasas para cada camino y problemas de implementación cuando los periodos de tiempo son largos. En este caso es recomendable trabajar con probabilidades objetivas o “*del mundo real*”, las cuales brindan mayor intuición respecto del probable comportamiento de la opción.

## REFERENCIAS

- Arnold, T- Crack, T. (2004). Using the WACC to Value Real Options. *Financial Analysts Journal*(60), 78-82.
- Arnold, T-Crack, T. (2004). *Real Option Valuation Using NPV*. SSRN: Social Science Research Network.
- Arnold; T-Crack, T. (2003). *Option Pricing in the Real World: A Generalized Binomial Model with Applications to Real Options*. SSRN: Social Science Research Network SSRN.
- Black, F- Scholes, M. (Mayo de 1972). The Valuation of Options Contracts and a Test of Market Efficiency. *Journal of Finance*, 399-418.
- Black, F- Scholes, M. (Mayo-Junio de 1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, 637-659.
- Borison, A. (2003). *Real Options Analysis: Where are the Emperor's Clothes?* Standford: Standford University .
- Brennam, M- Schwartz, E. (1985). Evaluating Natural Resources Investment. *Journal of Business*(58), 135-157.
- Brennan, M- Schwartz, E. (1985). A New Approach to Evaluating Natural Resource Investment. *Midland Corporate Financial Journal*(3), 37-47.
- Brennan, M- Trigeorgis L. (2000). *Project Flexibility, Agency and Competition: New Development in the Theory and Application of Real Options* (1 ed.). New York: Oxford University Press.
- Copeland, T- Antikarov, V. (2001). *Real Options* (1 ed.). New York: Texere LLC.
- Copeland, T- Koller, T- Murrin, J. (2000). *Valuation: Measuring and Managing the Value of Companies* (3 ed.). New York: Wiley.
- Copeland, T- Tufano, P. (2004). A Real World to Manage Real Options. *Harvard Business School Review*(82), 90-99.
- Cox, J- Ross, S-Rubinstein, M. (Septiembre de 1979). Option Pricing: A Simplified Approach. *Journal of Financial Economics*, 229-263.
- Cox, J- Huang, C. (1986). *Option Pricing Theory and its Applications*. Massachusetts Institute of Technology, Sloan School of Management. Massachusetts: MIT University Press.

- Cox, J- Ross, S. (1976). The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes. *Journal of Financial Economics*(3), 145-166.
- Dixit, A- Pindyck, R. (1994). *Investment under Uncertainty* (1 ed.). New Jersey: Pricenton University Press.
- Hull, J. (2005). *Futures, Options and other Derivatives* (5 ed.). New Jersey: Prentice Hall.
- Ingersoll, J- Ross, S. (1992). Waiting to Invest: Investement andr Uncertainty. *Journal of Business*(65), 1-29.
- Keema, A. (1988). *Options in Real and Financial Markets*. Working Paper Ph.D diss, Erasmus University, Finance, Erasmus.
- Kulatilaka, N- Trigeorgis, L. (1994). The General Flexibility To Swicht: Real Options Revisited. *International Journal of Finance*(2), 123-145.
- Kulatilaka, N. (1988). Valuing the Flexibility of Flexible Manufacturing Systems. *IEEE Transactions in Engineering Management*(22), 250-257.
- Kulatilaka, N. (1995). Operating Flexibilities in Capital Budgeting: Substitutability and Complementary in Real Options. En L. Trigeorgis (Ed.), *Real Options in Capital Investment: Models, Strategies and Applications*. Westport Conn.: Praeger.
- Luherman,T. (1998). Investment Opportunities as Real Options: Get started with the numbers. *Harvard Business Review*(4), 51-67.
- Margrabe. (1978). The Value of an Option to Exchange one Asset for Another. *Journal of Finance*(33), 177-186.
- Mason, S- Merton, R. (1985). The Role of Contingent Claims Analysis in Corporate Finance. En Varios, *Recent Advances in Corporate Finance*. New York: Homewood Irwin.
- Mc Donal, R - Siegel, J. (1986). Investment and the Valuation of Firms when here is an Option to Shut Down. *International Economic Review*(26), 321-349.
- Mc Donald, R-Siegel, D. (1981). *Option Pricing when the Underlying Asset is Non-Stored*. School of Management, School of Management. Boston: Boston University.
- Merton, R. (Primavera de 1973). The Theory of Rational Options Pringing. *Bell Journal of Economics and Management Science*, 141-183.
- Merton, R. (Enero-Marzo de 1976). Option Pricing when Underlying Stock Returns are Discontinuous. *Journal of Financial Economics*, 125-144.
- Milanesi, G- Vigier, H. (2010). Árboles de Decisión, Opciones Reales y Enfoque Integrado en Mercados Completos e Incompletos. En A. A. Política (Ed.), *Anales Asociación Argentina de Economía Política* (págs. 1-30). Buenos Aires: AAEP.
- Mun, J. (2004). *Real Options Analysis: Tools and Techniques for Valuing Strategic Investment and Decisions* (1 ed.). New York: Wiley.
- Myers, S- Majd, S. (1990). Abandonment Value and Project Life. *Advances in Futures and Options Research*(4), 1-21.
- Myers, S. (1977). Determinants of Corporate Borrowing. *Journal of Financial Economics*(5), 147-176.
- Paddock, J-Siegel, D-Smith, J. (1988). Option Valuation of Claims on Physical Assets: The Case of Offshore Petroleum Lease. *Quarterly Journal of Economics*(103), 479-508.
- Pindyck, R. (1988). Irreversible Investment, Capacity Choice and the Value of the Firm. *American Economic Review*(78), 969-985.
- Ross, S. (1976). Options and Efficiency. *Quarterly Journal of Economics*(90), 75-89.
- Smit, H. (1996). The Valuating of Offshore Concessions in the Netherlands. *Financial Management*(26), 5-17.
- Smit, H-Trigeorgis, L. (2004). *Strategic Investment: Real Options and Games* (1 ed.). New Jersey, Estados Unidos: Princeton University Press.
- Smith, J. (2005). Alternative Approach for Solving Real Options Problems. *Decision Analysis*(2), 89-102.
- Smith, J-Nau, R. (1995). Valuing Risky Projects: Option Pricing Theory and Decision Anaysis . *Management Science*(5), 795-816.
- Trigeorgis, L- Mason, S. (1987). Valuing Managerial Flexibility. *Midland Corporate Finance*, 5, 14-21.
- Trigeorgis, L. (1988). A Conceptual Options Framework for Capital Budgeting. *Advances in Futures and Options Research*(4), 145-167.
- Trigeorgis, L. (1993). Real Options and Interactions with Financial Flexibility. *Financial Management*(22), 202-224.

- Trigeorgis, L. (1995). *Real Options in Capital Investment: Models, Strategies and Applications* (1 ed.). London, United Kindgon: Praeger.
- Trigeorgis, L. (1997). *Real Options: Managerial Flexibility and Strategy in Resource Allocations* (2 ed.). Cambridge: MIT Press.
- Wang, A-Halal, W. (2010). Comparision of Real Asset Valuation Models: A Literature Review. *International Journal of Business and Management*(5), 14-24.
- Wilmott, P. (2009). *Frequently Asked Questions in Quantitative Finance* (Segunda ed.). United Kingdom: John Wiley & Sons.