

MOMENTOS ESTOCÁSTICOS DE ORDEN SUPERIOR Y LA ESTIMACIÓN DE LA VOLATILIDAD IMPLÍCITA

Aplicación de la expansión de Edgeworth y el modelo Black-Scholes

Gastón S. Milanesi

Universidad Nacional del Sur

SUMARIO: 1. Introducción; 2. El modelo de Black-Scholes y la expansión de Edgeworth; 3. Un caso de aplicación. Estimando la volatilidad implícita: el modelo tradicional versus el expandido; 4. Conclusiones.

Para comentarios: milanesi@uns.edu.ar

Resumen

Una explicación acerca de la forma de la curva de volatilidad implícita en los contratos de opciones deriva de los momentos estocásticos de orden superior, Wilmott, (2009). En base al trabajo de Baliero Filho y Rosenfeld (2004) se propone un modelo iterativo para estimar la volatilidad implícita con la expansión de Edgeworth sobre el modelo Black-Scholes. En la primera sección se introduce el modelo, seguidamente se desarrolla un caso de valoración de un contrato de opción del mercado de capitales argentino, aplicando el modelo B-S con la expansión de Edgeworth. Finalmente se presentan las conclusiones relativas a la forma plana de la volatilidad obtenida del modelo transformado y la importancia de la curtosis (pesos de los extremos de la curva de distribución de probabilidad) en el valor teórico de los contratos fuera del dinero, demostrando la necesidad de incorporar momentos de orden superior en la valoración de opciones.

1. Introducción

La volatilidad de los retornos de un activo constituye uno de los parámetros fundamentales en la ecuación diferencial de Black-Scholes (B-S) que arroja la evolución en el tiempo y la forma en que es afectado el precio de una opción por el precio del subyacente. Para los fines del análisis de los resultados del modelo B-S la noción de volatilidad puede ser estimada en formas diferentes: actual, histórica, implícita, proyectada o de cobertura¹. La conocida como implícita es de particular interés, dado que permite derivar la curva de volatilidad implícita y por lo tanto comparar precios de opciones bajo diferentes ejercicios y expiraciones. Se ha constatado que, a pesar de que la solución a la ecuación B-S predice monotonicidad creciente de la volatilidad, la curva obtenida en términos de los precios de mercado es decreciente o tiene forma de campana invertida (*volatilitysmile*). Una explicación para este comportamiento es que las opciones de compra y venta fuera del dinero presentan mayor volatilidad implícita en los extremos que sus pares en el dinero, debido a que la curva incorpora la asimetría y curtosis de la distribución de rendimientos del subyacente, Wilmott(2009). Por otro lado, los rendimientos y precios no suelen tener un comportamiento normal y lognormal respectivamente, Taleb(2004).

Por lo tanto, la razón última de la aparición de la *volatilitysmile* se encontraría en la presencia de sesgos y colas importantes en las distribuciones de los resultados del subyacente. Si bien en teoría el valor de una opción es el valor presente de sus flujos esperados bajo una caminata aleatoria neutral al riesgo, los sesgos y extremos en la distribución de probabilidad terminarían arrojando precios mayores que los predichos por el modelo de B-S, al menos para los ejercicios extremos (altos-bajos), dando lugar a altas volatilidades y por ende a la forma de campana invertida (*smile*).

El propósito de este trabajo es combinar las virtudes del tradicional modelo para valorar opciones B-S con la hipótesis de no-normalidad. Se expondrá un modelo de solución cerrada incorporando el tercer y cuarto momento estocástico de la distribución. Para ello se empleará como herramienta formal la transformación de Edgeworth, que permite expresar una distribución de probabilidad en términos de sus momentos. Esto, a su vez, permite estimar de manera implícita no sólo la volatilidad sino también la asimetría, la curtosis y la tasa libre de riesgo, siguiendo la propuesta de Baliero Filho y Rosenfeld (2004).

Los resultados que se obtienen son los siguientes:

- a. El valor de mercado de una opción; a partir del valor correspondiente al modelo B-S modificado mediante la aplicación de la expansión de Edgeworth.
- b. Los valores implícitos correspondientes a volatilidad, asimetría, curtosis y tasa libre de riesgo.
- c. El impacto de los momentos de orden superior en el valor de mercado para los contratos fuera del dinero.

El resto de este trabajo está organizado de la siguiente manera: primero se introduce la expansión de Edgeworth y se presenta la ecuación de valoración B-S con la expansión. Luego se describe el proceso de iteración que permite estimar implícitamente la curva de volatilidad, así-

¹ La volatilidad actual está capturada por parámetro σ en la ecuación parcial diferencial de Black-Scholes. Es imposible medirla exactamente por lo que lo mejor que se puede hacer es estimarla a partir de algún modelo estadístico. Así, la volatilidad histórica o realizada se obtiene de las observaciones históricas de precios, dando una medida estadística del riesgo del subyacente. La volatilidad implícita es el número en la fórmula de Black-Scholes que hace coincidir el valor teórico con el precio de mercado. En tanto que la volatilidad proyectada (a partir de la implícita) corresponde a un momento futuro del tiempo. La volatilidad de cobertura (*hedging volatility*) es el parámetro a introducir en la estimación de la letra griega delta para establecer la cantidad de subyacente a vender en corto con propósitos de cobertura. Si bien hay muchas formas de estimar la volatilidad, una elegante solución surge de aplicar el concepto de incertidumbre. En este caso la volatilidad no está capturada en un solo valor sino en un rango o intervalo de posibles valores Wilmott (2009).

metría, curtosis y tipo sin riesgo, valorando un contrato de opción de compra negociadas en el Mercado de Capitales Argentino. Para contrastar resultados se procede valorando opciones de compra y venta sobre el mismo subyacente y con similar vencimiento.

2. El modelo de Black-Scholes y la expansión de Edgeworth

2.1 La expansión de Edgeworth

La presencia de sesgos importantes es característica de distintos tipos de distribuciones probabilísticas no-gaussianas. Sin embargo se puede ver que las dichas distribuciones pueden obtenerse a partir de transformaciones de la distribución normal, mediante la expansión de Edgeworth, Jarrow y Rudd, (1982).

Para ver cómo se procede suponemos una sucesión de variables aleatorias independiente e idénticamente distribuidas (*iid*) x_1, x_2, \dots, x_n con media μ y varianza finita σ^2 . Se define una variable aleatoria

$$X_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} x_i \quad \text{Ec 1}$$

El teorema central del límite asegura que cuando $n \rightarrow \infty$ la variable aleatoria

$S_n = \sqrt{n} \frac{(X_n - \mu)}{\sigma}$ se aproxima a una distribución $N(0,1)$. Si el objetivo es determinar su distribución para un n finito se procede buscando la función característica de la función que aproxima la distribución de la variable S_n definiendo $X_n(t) = E(e^{itS_n})$, la cual para el caso de que las observaciones surjan de una distribución normal es igual a $e^{-t^2/2}$. La función puede ser expandida de la siguiente manera;

$$\chi_n(t) = \exp\left[-\frac{t^2}{2} + \frac{1}{n^{1/2}} \kappa_3(it)^3 + \dots + \frac{1}{n^{(j-2)/2}} \kappa_j(it)^j + \dots\right] \quad \text{Ec 2}$$

donde los valores κ indican los momentos de la distribución de S_n . La distribución de χ_n puede aproximarse mediante la expansión de Edgeworth:

$$g(x) = \left[1 + \frac{\varepsilon}{6} (x^3 - 3x) + \frac{\kappa - 3}{24} (x^4 - 6x^2 + 3) + \frac{\varepsilon^2}{72} (x^6 - 15x^4 + 45x^2 - 15)\right] z(x) \quad \text{Ec 3}$$

La expresión es válida hasta el orden $1/n$, utilizando asimetría $\xi = \kappa_3$ y curtosis $\kappa = \kappa_4 + 3$. La variable $z(x)$ representa la distribución $N(0,1)$.²

2.2 El modelo B-S y el ajuste con la expansión de Edgeworth

La distribución de los rendimientos de los activos financieros y reales, a menudo no se ajusta al clásico comportamiento normal presentando asimetría y pesadez en los extremos. Los nuevos proyectos, desarrollos tecnológicos e innovaciones en el mercado, se caracterizan por la escasa disponibilidad de activos comparables y nula frecuencia de observaciones de precios y rendimientos. Suponer un proceso estocástico del subyacente sobre la base de sólo dos momentos

² Cabe destacar que según los valores de los parámetros la distribución de Edgeworth puede tomar valores negativos, Rubinstein (1998)

(media-desvío) puede generar errores en la valoración del activo real o el derivado financiero. Consecuentemente es menester incorporar momentos estocásticos de orden superior, permitiendo una estimación ajustada del valor y la volatilidad del activo.³

Para derivar una forma cerrada de valoración a partir del clásico modelo Black-Scholes se parte de la tasa de crecimiento del activo definida por la siguiente expresión;

$$\mu T = rT - \log\left[1 + \frac{\kappa-3}{24} (\sigma\sqrt{T})^4 + \frac{\varepsilon}{6} (\sigma\sqrt{T})^3 + \frac{\varepsilon^2}{72} (\sigma\sqrt{T})^6\right] \quad \text{Ec 4}$$

Cuando la distribución es normal, $\xi=0$ y $\kappa=3$ entonces $\mu=r$ se recobra la solución del modelo de Black-Scholes.

El valor esperado de la opción está dado para el caso general por la siguiente expresión,

$$C_0^{\text{Edge}} = e^{-rT} \int_{-\infty}^{\infty} dx g(x) \max(S_0 e^{(\mu-\sigma^2/2)T + \sigma\sqrt{T}x} - K, 0) \quad \text{Ec 5}$$

La integral puede transformarse en un modelo de solución cerrada para la valoración de opciones; Baliero Filho y Rosenfeld (2004), donde al resultado del modelo de B-S se le adiciona la expansión de Edgeworth:

$$\begin{aligned} C_0^{\text{Edge}} = C_0^{\text{BS}} + & \\ & \left(\frac{e^{-rT-x_m^2/2+\sigma\sqrt{T}x_m}}{72\sqrt{2\pi}} V_0 \left(\begin{aligned} & \left((\sigma\sqrt{T})^5 \varepsilon^2 + (\sigma\sqrt{T})^4 \varepsilon^2 x_m + (\sigma\sqrt{T})^3 (3(\kappa-3)) + \varepsilon^2 (x_m^2 - 1) \right) \\ & + (\sigma\sqrt{T})^2 (12\varepsilon - 3(\kappa-3)x_m + \varepsilon^2 x_m (x_m^2 - 3)) \\ & + (\sigma\sqrt{T}) (12\varepsilon x_m + 3(\kappa-3)(x_m^2 - 1) + \varepsilon^2 (x_m^4 - 6x_m^2 + 3)) \end{aligned} \right) \right) + \\ & \left(\frac{e^{-rT-x_m^2/2}}{72\sqrt{2\pi}} (e^{u+\sigma\sqrt{T}x_m} V_0 - K) (3(\kappa-3)x_m (x_m^2 - 3) + 12\varepsilon(x_m^2 - 1) + \varepsilon^2 x_m (x_m^4 - 10x_m^2 + 15)) \right) + \\ & \left(\frac{e^{u-rT-\sigma^2 T/2}}{72} V_0 N(d_1) \left((\sigma\sqrt{T})^4 3(\kappa-3) + (\sigma\sqrt{T})^6 \varepsilon^2 + 12(\sigma\sqrt{T})^3 \varepsilon \right) \right) \end{aligned} \quad \text{Ec 6}$$

donde

$$x_m = \frac{\log\left(\frac{K}{S_0}\right) - (\mu - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} \quad \text{es el valor mínimo que asegura que el integrando de la ecuación (5)}$$

sea no-negativo.

El tradicional resultado B-S se recupera cuando la distribución es normal; $\xi=0$ y $\kappa=3$.

En el caso de una opción de venta se sigue igual criterio que en el caso anterior, a la ecuación de valoración $P_0^{\text{BS}} = V_0 (N(d_1) - 1) - K e^{-rT} (1 - N(d_2))$ se añade la expansión,

$$P_0^{\text{Edge}} = P_0^{\text{BS}} + w(x) \quad \text{Ec 7}$$

El valor de la opción de venta obtenido de la paridad put-call es consistente con la ecuación anterior.

³ En los derivados financieros los momentos estocásticos pueden inferirse a través de los precios de mercado. Esto permitiría obtener una medida ajustada de la volatilidad. En el caso de los modelos de valoración mediante opciones reales los momentos pueden sensibilizarse presentando un rango de valor correspondiente a la flexibilidad estratégica valorada.

3. Un caso de aplicación. Estimando la volatilidad implícita: el modelo tradicional versus el expandido

En este apartado se deriva la curva de volatilidad implícita producto de aplicar el modelo tradicional de Black-Scholes y la transformación de Edgeworth (ecuación 6). Para ello se emplea un método iterativo⁴ a partir de suponer que la solución a la ecuación es igual al precio de mercado (C_t) observado.⁵ Se iteran los valores correspondientes a desvío (σ); asimetría (ξ); curtosis (κ) y tipo sin riesgo (r_F). Las restricciones del modelo son:⁶ $C_t \geq 0$; $\sigma \geq 0$; $-0,8 \leq \xi \leq 0,8$; $3 \leq \kappa \leq 5,4$; $r_F \geq 0$. Se itera el modelo con la transformación definiendo con valor cero los momentos de orden superior, la volatilidad y la tasa libre de riesgo con su valor histórico y valor de referencia respectivamente.⁷ Obtenidos los valores implícitos de los momentos se procede a iterar el clásico modelo de Black-Scholes. Los momentos de orden superior son definidos con valor $\xi = 0$; $\kappa = 3$ mientras que la volatilidad histórica y la tasa libre de riesgo se suponen al valor implícito obtenido precedentemente.

Para la aplicación del modelo que se presenta a continuación se tomó un contrato de opción de compra americana que no paga dividendos sobre la acción Grupo Financiero Galicia (GFGC) con vencimiento el 15 de junio del 2006, con tasa libre de riesgo BAIBAR del 8,90% efectivo anual. Los valores corresponden a la información suministrada al 27 de abril del 2012 por el Instituto Argentino de Mercados de Capitales (IAMC): Los valores correspondientes a los diferentes precios de ejercicio para el contrato se indican en la tabla 1.

A continuación se presentan los resultados de aplicar iterativamente la ecuación 6. En la primera columna del cuadro se encuentra los contratos evaluados, la segunda presente el precio de mercado de la opción de compra. La tercera y cuarta columna muestran los valores teóricos correspondientes a la ecuación 6. La restricción de valor de mercado se descompone entre el modelo BS y la expansión de Edgeworth. La quinta, sexta y séptima columnas presentan los valores intrínsecos correspondientes a la volatilidad, asimetría y curtosis de la ecuación 6. La octava columna presenta la volatilidad implícita propia de aplicar el tradicional modelo B-S. Finalmente la novena columna presenta el tipo sin riesgo implícito.

Para los contratos en el dinero los valores de la volatilidad implícita σ y $\sigma(BS)$ se asemejan. En estos casos la asimetría ξ y curtosis κ no tienen peso significativo en la estimación del valor. Todos los contratos con precio de ejercicio (\$ 2,60 a \$ 4) se presente una leve asimetría negativa (-0.0005778 a -0.01377) y la curtosis se mantiene constante en 3,000. En el caso de los precios de ejercicio \$ 4,80 y \$ 5,60 los momentos superiores tienen peso en el valor, conforme se expone en la tabla 3.

El valor teórico de las opciones fuera del dinero se encuentra explicado mayoritariamente por el efecto de los momentos superiores, específicamente la curtosis. Esto es así debido a que el valor de las opciones fuera del dinero surge de valores extremos para el subyacente analizado. En este caso el precio spot de la acción es de \$ 2,98, debiendo superara ejercicios de casi el doble del valor (\$ 4,80 y \$ 5,60).

⁴ Cuando se trabaja con datos, es posible resolver el modelo mediante la herramienta Solver del aplicativo Microsoft Excel®.

⁵ En todos los modelos donde se estimen implícitamente las variables se supone que los valores arrojados por el mercado son correctos.

⁶ Las restricciones correspondientes a la asimetría y curtosis se obtienen considerando la zona de posibles valores nulos para la función, Baliero Filho y Rosenfeld (2004)

⁷ Se toma la volatilidad histórica sobre las últimas 40 ruedas y como tipo libre de riesgo la tasa BAIBOR. Ambos parámetros son estimados y empleados en la determinación y publicación de valores teóricos para opciones financieras en el mercado argentino por el Instituto Argentino de Mercado de Capitales (IAMC)

Tabla 1 Datos publicados por el IAMC al 27-4-2012
Opción de compra GFGC vencimiento 15-6-2012. El IAMC calcula el call teórico
con el modelo BS, volatilidad histórica y Tasa BAIBAR

Tasa BAIBAR	8,90%	Subyacente \$	2,98
días	49	Vol.His	38,68%
Sticker	Prima	Ejercicio	Call Teórico
GFGC2,60JU	\$ 0,4400	\$ 2,60	\$ 0,4420
GFGC2,80JU	\$ 0,3000	\$ 2,80	\$ 0,2920
GFGC3,00JU	\$ 0,1730	\$ 3,00	\$ 0,1770
GFGC3,20JU	\$ 0,0950	\$ 3,20	\$ 0,0990
GFGC3,40JU	\$ 0,0500	\$ 3,40	\$ 0,0510
GFGC3,60JU	\$ 0,0250	\$ 3,60	\$ 0,0240
GFGC3,80JU	\$ 0,0140	\$ 3,80	\$ 0,0110
GFGC4,00JU	\$ 0,0050	\$ 4,00	\$ 0,0040
GFGC4,80JU	\$ 0,0070	\$ 4,80	\$ -
GFGC8,00JU	\$ 0,0030	\$ 5,60	\$ -

Tabla 2 Valores implícitos obtenidos del proceso iterativo correspondiente a la ecuación 6

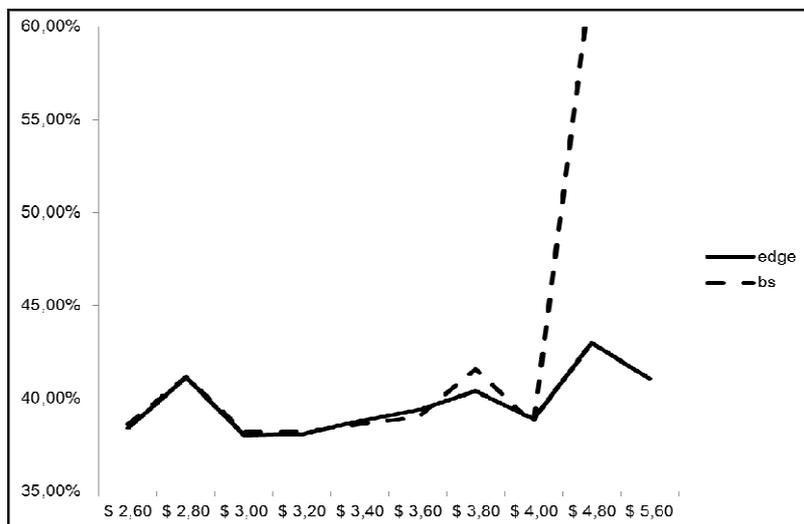
Sticker	Observado	BS	Edgeworth	σ	ξ	κ	$\sigma(\text{BS})$	$rf(\text{anual})$
GFGC2,60JU	\$ 0,4400	\$ 0,440004	\$ -0,000004	38,41%	-0,00057789	3,00000000	38,61%	8,8821%
GFGC2,80JU	\$ 0,3000	\$ 0,299912	\$ 0,000088	41,13%	-0,00632591	3,00000000	41,17%	8,9919%
GFGC3,00JU	\$ 0,1730	\$ 0,173001	\$ -0,000001	38,03%	-0,00024215	3,00000000	38,22%	8,8863%
GFGC3,20JU	\$ 0,0950	\$ 0,095038	\$ -0,000038	38,10%	-0,00178163	3,00000000	38,22%	8,8913%
GFGC3,40JU	\$ 0,0500	\$ 0,049994	\$ 0,000006	38,80%	0,00047216	3,00000000	38,61%	8,9026%
GFGC3,60JU	\$ 0,0250	\$ 0,024936	\$ 0,000064	39,40%	-0,00418152	3,00000000	39,00%	8,9086%
GFGC3,80JU	\$ 0,0140	\$ 0,012579	\$ 0,001421	40,40%	-0,03741202	3,00000000	41,58%	8,9165%
GFGC4,00JU	\$ 0,0050	\$ 0,004366	\$ 0,000634	38,92%	-0,0137758	3,00000000	38,61%	8,9024%
GFGC4,80JU	\$ 0,0070	\$ 0,000270	\$ 0,006730	43,01%	-0,25026395	3,15701274	62,75%	8,9061%
GFGC5,60JU	\$ 0,0030	\$ 0,000003	\$ 0,002997	41,06%	-0,8000000	3,78034209	69,38%	8,9066%

Tabla 3 Precio observado, componentes de la ecuación 6 (BS-Edgeworth) y relación expansión sobre valor (Edg/Valor)

Sticker	Observado	BS	Edgeworth	Edg/Valor
GFGC2,60JU	\$ 0,4400	\$ 0,440004	\$ -0,000004	-0,000909%
GFGC2,80JU	\$ 0,3000	\$ 0,299912	\$ 0,000088	0,029333%
GFGC3,00JU	\$ 0,1730	\$ 0,173001	\$ -0,000001	-0,000578%
GFGC3,20JU	\$ 0,0950	\$ 0,095038	\$ -0,000038	-0,040000%
GFGC3,40JU	\$ 0,0500	\$ 0,049994	\$ 0,000006	0,012000%
GFGC3,60JU	\$ 0,0250	\$ 0,024936	\$ 0,000064	0,256000%
GFGC3,80JU	\$ 0,0140	\$ 0,012579	\$ 0,001421	10,150000%
GFGC4,00JU	\$ 0,0050	\$ 0,004366	\$ 0,000634	12,680000%
GFGC4,80JU	\$ 0,0070	\$ 0,000270	\$ 0,006730	96,142857%
GFGC5,60JU	\$ 0,0030	\$ 0,000003	\$ 0,002997	99,900000%

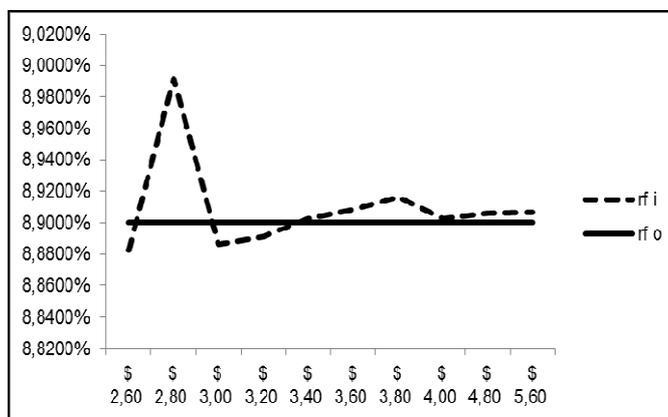
Siguiendo con los resultados de la tabla 2, la volatilidad según el modelo clásico asciende a 62,75% y 69,38% respectivamente. La volatilidad implícita obtenida de aplicar la ecuación 6 solamente asciende al 43,01% y 41,06% para los dos últimos contratos. En este caso la asimetría-curtosis es de -0.25; 3.1570 y -0.8; 3.78. En el gráfico 1 se expone la forma de la curva correspondiente a la volatilidad implícita.

Gráfico 1 Volatilidad implícita Black-Scholes (bs) y Edgeworth (edge)



En la ilustración se observa la mayor regularidad de la curva estimada con la transformación de Edgeworth en relación a la curva del modelo tradicional. Esta situación es consecuente con las afirmaciones que la forma de sonrisa correspondiente a la volatilidad implícita (extremos) se debe a que el valor estimado para la volatilidad es impuro, es decir contiene los momentos de orden superior. La ecuación 6 depura asimetría y curtosis otorgando mayor estabilidad a la volatilidad. El tipo libre de riesgo estimado implícitamente se mantuvo en los rangos de la tasa publicada y observada en el mercado, independientemente del contrato.

Gráfico 2 Relación tasa libre de riesgo BAIBAR observada y tasa implícita



La tabla 4 presenta el valor de los put equivalentes aplicando la paridad put-call a partir de la ecuación 6. Para las opciones de venta fuera del dinero a fecha de la valoración (ejercicios \$ 2,60 y \$ 2,80) el valor estimado con el modelo es inferior al precio observado en el mercado,

ajustando para las que se encuentran en el dinero (\$3,00 a \$3,40), mostrando un comportamiento que da la imagen especular a la opción de compra.

Tabla 4: Valor opción de venta estimada aplicando la ecuación de paridad (ecuación 6); prima observada; diferencia observado-estimado; valor relativo diferencia sobre prima observada

Sticker	Put (Paridad)	Observado	Diferencia	Dif/Obser
GFGP2,60JU	\$ 0,02918	\$ 0,06	\$ 0,03082	51,3635%
GFGP2,80JU	\$ 0,08640	\$ 0,10	\$ 0,01160	11,8332%
GFGP3,00JU	\$ 0,15742	\$ 0,17	\$ 0,01258	7,3977%
GFGP3,20JU	\$ 0,27703	\$ 0,28	\$ 0,00297	1,0604%
GFGP3,40JU	\$ 0,42961	\$ 0,45	\$ 0,02039	4,5318%

4. Conclusiones

El modelo de solución cerrada es una alternativa para incorporar de los momentos de orden superior a la ecuación de Black-Scholes. Los resultados obtenidos de su aplicación son los siguientes:

- El valor de mercado se puede descomponer entre la valoración del modelo de BS y la participación en el valor de los momentos de orden superior capturados por la expansión de Edgeworth (ecuación 6). Para aquellos contratos en el dinero el efecto de los sesgos y curtosis es mínimo. En cambio para aquellos contratos en que el valor depende de eventos extremos (colas pesadas) la curtosis cobra relevancia en la estimación del valor (tabla 2 y 3).
- La forma de la curva de volatilidad implícita en el modelo B-S sigue la clásica sonrisa, sobre todo porque en los contratos fuera del dinero el componente volatilidad es impuro, incorporando los momentos superiores. La curva de volatilidad implícita de la ecuación 6 indica que la volatilidad se mantiene en un rango estable, independiente del precio de ejercicio y vinculada con el comportamiento del subyacente (ilustración 1).
- En las opciones con poca probabilidad de terminar en el dinero el valor potencial se encuentra explicado mayoritariamente por los momentos de orden superior.

Estos resultados indican la necesidad de trabajar con modelos de valoración de opciones (financieros y reales) que incorporen los momentos de orden superior, sobre todo en aquellos casos de flujos de fondos esperados con valores positivos vinculados a eventos extremos o poco probables en términos de distribución normal. Esto puede darse en los casos de innovación tecnológica, de bienes intangibles de alto riesgo, o para contratos de opciones con valor intrínseco negativo a fecha de valuación.

REFERENCIAS

- Baliero Filho; R-Rosenfeld,R, 2004. Testing Option Pricing with Edgeworth Expansion. *Physica A: Statistical Mechanis an its Application*, Volumen 344, pp. 484-490.
- Jarrow, R-Rudd, A, 1982. Aproximate option valuation for arbitrary stochastic processes. *Journal of Financial Economics*, Volumen 10, pp. 347-369.
- Rubinstein, M., 1998. Edgeworth Binomial Trees. *Journal of Derivatives*, Issue 5, pp. 20-27.

Taleb, N., 2004. *Fooled by Randomness: The Hidden Role of Chance in Life and Markets*. New York: Random House.

Wilmott, P, 2009. *Frequently Asked Questions in Quantitative Finance*. Segunda ed. United Kingdom: John Wiley & Sons.