

44 Jornadas Nacionales de Administración Financiera
Septiembre 19 y 20, 2024

Simulación Montecarlo y valuación de opciones reales

Gastón S. Milanesi

Universidad Nacional del Sur – IICA

SUMARIO

1. Introducción
2. Valuación de un proyecto de inversión con opciones
3. Usos en otros tipos de opciones reales simples
4. Conclusiones

Para comentarios:
milanesi@uns.edu.ar

Resumen

Se presenta un sencillo algoritmo en base a simulación Montecarlo para valuar la flexibilidad estratégica de un proyecto con resultados equivalentes a los obtenidos con el modelo Black-Scholes (BS). Su principal ventaja es la simplicidad para explicitar la conexión entre valor expandido, flujos de fondos, opciones del activo real. Los resultados preliminares obtenidos demostraron: a) equivalencia algebraica al modelo BS, para opciones reales simples (diferimiento, expansión, abandono, venta), b) ajuste al modelo binomial y c) versatilidad en la valuación estrategias con opciones reales simples (inversión-transferencia) o inversión diferida estocástica (precio de ejercicio no determinístico).

1. Introducción

Las opciones reales se han convertido en un instrumento de valoración utilizado para cuantificar la flexibilidad estratégica contenida en las decisiones empresariales. El valor de una opción está dado por el valor actual de la sumatoria correspondiente al producto entre: los flujos de fondos futuros de la opción y las probabilidades de ocurrencia asociadas a cada posible valor positivo proyectado, aquellas con valor negativo se les asigna valor cero. La flexibilidad del instrumento pone de manifiesto que el titular de la opción adquiere un derecho, pero no se obliga. Es decir, no queda expuesto irreversiblemente a la incertidumbre de la inversión. El modelo de Black y Scholes (1972) presenta una expresión cerrada para valor opciones europeas. Intuitivamente, la lógica del modelo se puede desagregar en tres pasos:

- a. Proyectar la distribución de probabilidad de valores futuros correspondientes al subyacente.
- b. Estimar los valores esperados asociados a la distribución de probabilidad obtenida en (a), computando valor cero a los resultados esperados de signo negativo.
- c. Calcular el valor actual de la suma de valores esperados obtenidos en (b), ponderados por su probabilidad de ocurrencia.

El primer paso se refiere al modelado de la función de distribución de probabilidad correspondiente a los posibles valores que adopta el activo. El segundo define el procedimiento seleccionado para la estimar un valor esperado individual (usado como el valor esperado del precio de la opción). El tercero permite estimar el valor teórico de la opción como el producto entre la suma ponderada entre valores terminales (b) y probabilidades asociadas (a), actualizada esta por el valor tiempo del dinero. Los tres pasos indicados son los que subyacen en los modelos de mayor complejidad.

Los modelos de opciones reales son una adaptación a situación de valuación de activos reales. A partir de los modelos seminales utilizados en la valuación de opciones financieras para valuar opciones financieras, reconocen sus bases en el modelo de Black- Merton-Scholes

(BMS) (Black & Scholes, 1972, 1973 y Merton, 1973). La fórmula provee una forma de solución cerrada a través de ecuaciones diferenciales estocásticas, para describir el valor de la opción. A lo largo del tiempo el modelo evolucionó a formas complejas, dependiendo de modificaciones y adecuaciones según el proceso estocástico seleccionado; cantidad de momentos estocásticos de orden superior, complejidad y estructura de la opción.¹ También, y con fines prácticos para el *management* de la firma, el modelo BSM se adaptó a un lenguaje matemático sencillo, con el desarrollo del modelo binomial.² A su vez existe una importante literatura relativa a la valoración de opciones reales.³

Los modelos citados precedentemente destacan por su riqueza matemática en un intento de describir y valorar la flexibilidad de las diferentes estrategias contenidas en el valor de un activo real.⁴ Pero a veces se transforman en “cajas negras” en donde se pierde capacidad para interpretar su lógica y por ende resultados arrojados. Su utilidad y capacidad predictiva son opacadas por la complejidad matemática y la dificultad para transmitir su significado en la toma de decisiones. Esto hace que sean poco empleados en la toma de decisiones (Fornero, 2010).

En base a las ideas expuestas, el presente trabajo propone un simple algoritmo para valorar opciones reales respetando los tres pasos indicados. Los resultados obtenidos con el modelo propuesto se aproximan a los generados por el modelo Black-Scholes (BS) y el modelo binomial, en tal sentido conduciendo a idénticas conclusiones. En el campo de las decisiones estratégicas de empresa, es más importante la conclusión de la decisión y su sentido, que la rigurosa exactitud del cálculo a diferencia de los activos financieros.

El insumo del modelo bajo estudio lo constituye la información disponible y extraída del valor actual de los flujos de fondos del proyecto. Implica conocer la distribución de probabilidad de los flujos de fondos del proyecto, tasa ajustada por riesgo, el nivel de inversión y la tasa libre de riesgo. Inputs de una suerte de modelo que, como fue aclarado previamente, replica los tres pasos indicados para determinar el valor de una opción real (Mathews, Datar & Johnson; 2007; Carmichael, Hersh & Praneeth, 2011). Pero al mismo tiempo explicita la conexión entre flujos, tasas de costo de capital, inversión y valor del proyecto.

Los resultados preliminares obtenidos exponen un idéntico ajuste al modelo BS en el caso de opciones reales asimilables a *call*, *put* o combinaciones de esta. Asimismo, aproxima razonablemente a los valores generados por el modelo binomial.

¹ Puede verse Dixit & Pindyck (1994), Balieiro Filho & Rosenfeld (2004), Haug (2007), Wilmott (2009).

² Puede verse Cox, Ross & Rubinstein (1979), Rendleman & Bartter (1979), Jarrow & Rudd (1982), Jabbour, Kramin & Young (2001), Camara & Chung (2006), Chance (2008).

³ Puede verse Myers (1977), Brennam & Schwartz (1985), Mason & Merton (1985), McDonald & Siegel (1986), Trigeorgis & Mason (1987), Keema (1988), Kulatilaka (1988), Trigeorgis (1988), Pindyck (1988), Myers & Majd (1990), Trigeorgis (1991), Trigeorgis (1993), Dixit & Pindyck (1994), Kulatilaka & Trigeorgis (1994), Kulatilaka (1995), Smith & Nau (1995), Trigeorgis (1995), Smit (1997), Trigeorgis (1997), Brennam & Trigeorgis (2000), Copeland & Antikarov (2001), Chance & Peterson (2002), Boer (2002), Borison (2005), Smit & Trigeorgis (2004), Brandao, Dyer & Hahn (2005), Smith (2005), Shockley (2006), Kodukula & Chandra (2006), Haahtela (2010), Brous (2011), Haahtela (2011a, 2011b), Brandao, Dyer & Hahn (2012), Milanese (2013), Milanese, Pesce & El Alabi (2013), Milanese y Tohmé (2014), Milanese (2014), Mun (2015), Salahaldin (2016), Milanese (2017, 2019, 2021, 2022).

⁴ El valor de un activo real, por ejemplo, una empresa en marcha se integra por los activos tangibles e intangibles existentes más las *oportunidades de crecimiento*. Estas oportunidades de crecimiento o flexibilidad estratégica son capturadas y valoradas por el enfoque de opciones (Smit & Trigeorgis, 2004).

La estructura del trabajo es la siguiente: seguidamente se desarrolla el modelo comparando, a través de un caso de aplicación, los resultados obtenidos con aquellos derivados de aplicar la ecuación BS y su aproximación con el binomial. En el caso del modelo binomial, adicionalmente, se procede a sensibilizar los plazos correspondientes al ejercicio de la opción. Luego se desarrollan casos donde el modelo propuesto es aplicado sobre diversas situaciones de inversión como: a) abandono del proyecto (*put simple*); a) proyecto diferido en el tiempo con flujos estocásticos (*call con ejercicio aleatorio*) y, c) proyecto diferido con flujo estocásticos y opción de venta de licencia (*long straddle*). Finalmente se exponen las principales conclusiones.

2. Valoración de un proyecto de inversión con opciones: el modelo Black-Scholes (BS) y su paralelo mediante un modelo basado en simulación Montecarlo

A través de un caso hipotético de estudio se desarrolla el algoritmo de simulación Montecarlo, comparando funcionamiento y resultados con el modelo BS y binomial.

2.1 El valor actual neto (VAN) en un proyecto con flexibilidad estratégica: opción de inversión diferida

Consideremos el siguiente caso: la firma R&D planifica el desarrollo de un nuevo prototipo de modelo de auto que será lanzado al mercado en un plazo de cinco años. Actualmente, se debe decidir si se asignan recursos a un grupo de investigación encargado de realizar todas las pruebas pilotos y diligencias para obtener las autorizaciones de producción y comercialización frente a organismos de control.

Para sostener el proyecto y el equipo de desarrollo es menester demostrar la viabilidad económico-financiera del proyecto en su etapa de producción y comercialización. Si los resultados esperados estimados en dicha etapa son satisfactorios, los mismos serán utilizados como argumento para persuadir a los propietarios sobre la conveniencia de asignar recursos en la fase de desarrollo.

Consecuentemente, el proyecto bajo estudio consta de dos etapas: prueba y producción-comercialización, en donde el resultado de la segunda condiciona el inicio de la fase piloto. La primera fase dura cinco años ($t=5$), a partir de dicho horizonte temporal comenzaría la comercialización del auto. Se estima que la segunda etapa generará un valor actual de los beneficios, $E(VP_5)$ \$4.375 (millones) con desvío σ_5 de \$1.345 (millones). Asimismo, la tasa de costo promedio ponderado de capital para la firma (CPPC) es de 10,5 % y la tasa libre de riesgo de 5,5 %. La inversión que demanda la etapa de producción y comercialización a concretar en el quinto año es de \$6.000 (millones), sin riesgo de cambio en los precios de los valores proyectados.

En el caso de valorar el proyecto con el enfoque tradicional del descuento de flujos de fondos se tienen los siguientes resultados:

- Flujos de fondos libres: $VA(VP_5; k) = \$2.588,05$ (millones).
- Inversión: $VA(I_5; r) = \$4557,43$ (millones).

- Resultado: $VAN = VA(VP_5; k) - VA(I_5; r) = -\$1969,38$ (millones).

Los resultados obtenidos conducen al rechazo, ya que los esfuerzos en investigación realizados en la primera etapa no se conectarán con resultados favorables en la fase de producción y comercialización.

No obstante, el ejemplo es un típico caso de análisis incompleto debido a las falencias que presenta el modelo tradicional de descuento de flujos de fondos. Este no considera el valor añadido por la opción del proyecto, ya que supone que la inversión es irreversible e inflexible. La opción (flexibilidad estratégica) consiste en diferir el compromiso de la inversión (opción de diferimiento). El tratamiento es asimilable a una opción europea: esperar de cinco años con el objeto de acotar la incertidumbre ante el ingreso de nueva información de mercado. El descuento de flujos de fondos supone que el compromiso de invertir en la segunda etapa ($t=5$) se contrae al inicio ($t=0$). La flexibilidad estratégica del proyecto debe ser cuantificada utilizando modelos de valoración de opciones.

2.2 Valorando la flexibilidad estratégica del proyecto: opción de diferir utilizando el modelo Black-Schole (BS)

El modelo BS es aplicado en la valoración de opciones reales simples (diferimiento, abandono, expansión) asimilables a *call-put* europeos. Su valor depende de la evolución estocástica del subyacente, influenciada principalmente por su volatilidad⁵. Para el usuario profesional o practicante, el modelo no explicita de manera sencilla la conexión entre flujos de fondos y valor esperado del proyecto, durante la vida de la opción. Mayormente este fue un motivo que sirve para entender porque estos instrumentos no han gozado de difusión en el mundo de los negocios (Fornero, 2011).

La ecuación del modelo BS es la siguiente:

$$C_0 = V_0 N(d_1) - X e^{-rt} N(d_2) \quad Ec 1$$

Donde C_0 representa el valor teórico de la opción, V_0 valor actual del subyacente, $N(d_i)$ la distribución normal estándar acumulativa de la variable d_i , X el precio de ejercicio; r la tasa libre de riesgo y t la fecha de expiración. Las variables d_1 y d_2 se estiman de la siguiente manera $d_1 = [\ln(V_0/X) + (r + \sigma^2/2)T]/\sigma\sqrt{T}$ y $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$.⁶

⁵ El parámetro volatilidad es uno de los principales insumos en los modelos de valoración de opciones. Su determinación ofrece ciertas dificultades en proyectos donde no existe activo financiero o cartera negociada en el mercado de capitales que replique la variabilidad de sus flujos de fondos del proyecto (Wang & Halal, 2010). Como solución frente al problema indicado se utiliza el enfoque MAD (*marketed asset disclaimer*) (Copeland & Antikarov, 2001; Brandao, Dyer & Hahn, 2005; Smith, 2005) en la estimación del desvío correspondiente a los flujos del proyecto. También se puede estimar mediante modelos de volatilidad condicional trabajando con series de tiempo (Brandao, Dyer & Hahn, 2012).

⁶ La expresión $V_0 N(d_1)$ es el valor actual esperado correspondiente al subyacente en el caso que la opción, finalice en el dinero. Donde $N(d_1)$ es la probabilidad ajustada por riesgo que el subyacente finalice por encima del precio de ejercicio a fecha de vencimiento. $X e^{-rt} N(d_2)$ representa el valor actual esperado del precio de ejercicio si la opción finaliza en el dinero, siendo $N(d_2)$ la probabilidad ajustada por riesgo de que la opción sea ejercida (Carmichael, Hersh & Praneeth, 2011).

En el caso bajo estudio, el valor de la opción se determina de la siguiente manera:

- Valor actual del subyacente $V_0 = E(VP_5) \times e^{-kt} = \$4.375 \times e^{-0,105 \times 5} = \$2.588,05$;
- Precio de ejercicio $X = \$6.000$.
- Tasa libre de riesgo $r = 5,50 \%$
- Fecha de ejercicio $t = 5$.
- Volatilidad $Dsv = V_0 e^{kt} \sqrt{e^{\sigma^2 t} - 1} = \$1.345 = \$2.588,05 e^{0,105 \times 5} \sqrt{e^{\sigma^2 5} - 1}$ siendo $\sigma = 13,44 \%$.

Respecto de la volatilidad se aplica la expresión contenida en el modelo de probabilidades implícitas desarrollada por Wilmott, Howison y Dewynne, (1995). Esta se obtiene despejando⁷ de la expresión mediante un proceso iterativo. Para ello es iterada la expresión con la función buscar objetivo, utilizando el menú Datos en Microsoft Excel ®. A partir del valor en unidades monetarias en un instante futuro ($E(VP_5)$), el valor actual del valor esperado del proyecto (V_0) y la incógnita de la volatilidad, es obtenido el valor aplicando la expresión indicada.

- Los parámetros estocásticos ascienden a: $d_1 = -1,7326$; $d_2 = -2,0331$; $N(d_1) = 0,04158$; $N(d_2) = 0,0210$.

El valor expandido o estratégico (VE) del proyecto con opciones (C_0) es de \$11,82 (millones) (ecuación 1). Este se descompone en valor actual tradicional (VAN) y valor de las opciones (VOR) (Trigeorgis, 1997); siendo

- VAN tradicional: $VAN = VA(VP_5; k) - VA(I_5; r) = -\$1969,38$ (millones).
- Valor Estratégico = \$11,82 (millones)
- Valor opción real (VOR) = $VOR = VE - VAN = \$11,82 - (-\$1969,38) = \$1981,2$

La decisión es diferir a los efectos de acotar la incertidumbre con el ingreso de nueva información.

2.3 El valor de la opción real de diferir usando simulación Montecarlo

El algoritmo es una sencilla herramienta que permite determinar el valor de las opciones reales simples, asimilables a *call-put* europeos. Emplea la técnica de simulación Montecarlo, para proyectar los recorridos aleatorios correspondientes al proceso estocástico asignado a los flujos de fondos en el horizonte de tiempo. Seguidamente son actualizados a la tasa de costo del capital del proyecto los valores positivos, mientras que a los valores negativos se les asigna el valor de cero (no ejercicio). Su implementación requiere de los siguientes pasos:

- a. Definir la variable aleatoria con media igual al valor actual de los beneficios futuros en el momento de ejercicio ($t=n$) y desvío a partir de una distribución lognormal.

⁷ La volatilidad se obtiene iterando la expresión con la función buscar objetivo del menú Datos en Microsoft Excel®. Dado el valor en unidades monetarias en un instante futuro ($t=5$), el valor actual del valor esperado del proyecto y la incógnita de la volatilidad, iterando se llega a resolver la misma.

- b. Definir la restricción que el valor actual de los probables flujos negativos esperados es igual a cero.
- c. Obtenidos los valores futuros, calcular el valor actual de la distribución de probabilidad anterior (puntos a. y b.), producto de la simulación,

El resultado que arroja el modelo es igual al valor de una opción europea, calculada utilizando el modelo BS. La expresión es la siguiente:

$$C_0 = E[\max(\bar{V}_0, k - I, r); 0] \quad Ec 2$$

Donde:

- \bar{V}_0 representa la variable aleatoria con primer y segundo momento estocástico $E(V_T)$ y $Dsv(V_T)$.
- I el precio de ejercicio determinístico de la inversión.
- k la tasa ajustada por riesgo.
- r tasa libre de riesgo.

Para demostrar el funcionamiento del modelo y su ajuste al modelo BS, se utilizó el ejemplo desarrollado en el punto 2.2. La simulación se desarrolló con el aplicativo Crystall Ball®.⁸ Para ello fueron definidas las siguientes variables:

- Variable aleatoria en $t=5$ (horizonte de decisión) se define con media $E(V_T) = \$4.375$ desvío $Dsv(V_T) = \$1.345$, Se supone que sigue el comportamiento de una distribución lognormal.
- Tasa de costo del capital $k = 10,5 \%$.
- Tasa libre de riesgo $r = 5,5 \%$
- Precio de ejercicio (inversión) $I = \$6.000$.
- Variable de pronóstico: se establece el siguiente algoritmo: $@E[\text{Max}\{(\underline{VP}_5 @ k - \text{Inversiones} @ r); 0\}]$.
- Número de iteraciones: $n = 500.000$ pruebas

El resultado obtenido asciende a un valor medio esperado del proyecto con opciones de $C_0 = \$11,82$ (millones). Se ajusta al valor de $\$11,82$ correspondiente a la ecuación 1. En la tabla 1 se presentan las salidas estadísticas de la simulación.

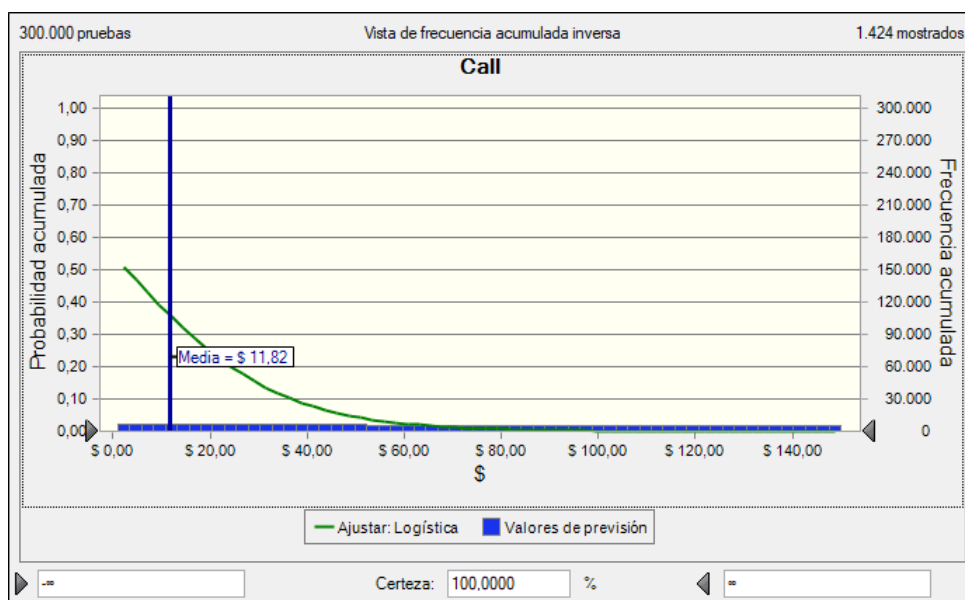
Cabe destacar que el tercer y el cuarto momentos estocásticos ($A=15,21$; $K=352,88$) son un rasgo característico de todo proyecto con flexibilidad estratégica. Es por ello que las opciones financieras, y por extensión las reales poseen un importante apalancamiento, explicado este por la asimetría positiva y las amplias colas en la distribución de valores probables (Collan, Fullér & Mezei, 2009), conforme surge en la ilustración 1. La fuerte asimetría y curtosis, explica estadísticamente el por qué un proyecto con un valor estático negativo, tenga un valor estratégico positivo, producto de la flexibilidad estratégica (opción). En otras palabras, la reversibilidad propia de las opciones y su potencial valor positivo encuentra fundamento estadístico en el tercer y cuarto momento estocástico (asimetría y curtosis) (Taleb, 2004).

⁸ Release 11.01.3.000

Tabla 1: Salidas estadísticas de la simulación
 $@E[\text{Max}\{VP_5@k\text{-Inversión}_5@r\};0\}$

Estadísticas	Call
Pruebas	500000
Caso base	\$ 0,00
Media	\$ 11,82
Mediana	\$ 0,00
Modo	\$ 0,00
Desviación estándar	\$ 114,02
Varianza	\$ 13.001,20
Sesgo	15,21
Curtosis	352,88
Coefficiente de variación	9,65
Mínimo	\$ 0,00
Máximo	\$ 8.194,14
Ancho de rango	\$ 8.194,14
Error estándar medio	\$ 0,21

Ilustración 1: Valor esperado promedio y distribución de frecuencias
 simulación simulación $@E[\text{Max}\{VP_5@k\text{-Inversión}_5@r\};0\}$



Asimismo, la sencillez y transparencia del modelo lo convierte en una herramienta de comunicación eficaz, posibilitando que la gerencia justifique el curso de acción seleccionado ante las diferentes capas organizacionales involucradas, sin apartarse de la racionalidad correspondiente al criterio costo-beneficio.

2.4 Prueba de robustez del algoritmo: análisis comparativo con el modelo Binomial y BS

El desempeño del modelo será contrastado con los resultados obtenidos de aplicar el clásico modelo binomial CRR (Cox, Ross & Rubinstein, 1979). Este se caracteriza por el comportamiento discreto de la variable aleatoria con distribución binomial, que converge con el modelo BS cuando $n/t \rightarrow \infty$. A continuación se brindan los datos del caso hipotético empleado: se debe valorar una inversión diferida donde su valor actual estático es de $V_0 = \$1000$; inversión, $I = \$800$; tasa libre de riesgo $r = 5,5\%$ y tasa ajustada por riesgo $k = 6\%$. Para ello se emplea el modelo binomial. Los diferentes horizontes propuestos para el ejercicio de la opción de inversión son: $t=1,2,3,4,5,10,20$. Se supone una volatilidad $\sigma = 9,53\%$.

Modelo binomial y BS: a partir de la volatilidad se calculan los coeficientes:

- $u = e^{0,0953\sqrt{1}} = 1,1$
- $d = e^{-0,0953\sqrt{1}} = 0,89$

La expresión utilizada para proyectar el valor del subyacente es la ecuación 3.

$$V_{(i,j)t+1} = V_{i,t} \times u; V_{j,t} \times d \quad \text{Ec 3}$$

Seguidamente se debe estimar el valor al vencimiento de la opción con la ecuación 4.

$$C_t = \max(V_t - I, 0) \quad \text{Ec 4}$$

Finalmente, el valor esperado inicial se obtiene calculando recursivamente desde $t = n$ hasta $t = 0$. El proceso recursivo requiere de ponderar los valores de los nodos intermedios por probabilidades neutras al riesgo, $V_{(i,j)t-1} = [V_{i,t} \times p + V_{j,t} \times (1 - p)] \times e^{-rt}$. Las probabilidades neutras al riesgo son:

- $p = (e^r - d)/(u - d) = 0,7051$
- $1 - p = 0,2948$

Se ha empleado la expresión sintética para determinar el valor actual de la opción a través del método binomial expuesta en la ecuación 5:

$$C_0 = \left[\sum_{j(t)=0}^{j(t)=n} C_{j(t)} \frac{j!}{j! (n-j)!} p^j (1-p)^{n-j} \right] e^{-rt} \quad \text{Ec 5}$$

En el anexo 1 se exponen las rejillas correspondientes a valores terminales, probabilidades neutras al riesgo y valor actual esperado de la opción (ecuaciones 4 y 5). También las variables de entrada del presente ejemplo, correspondientes al modelo BS (ecuación 1).

Algoritmo: se procedió a la simulación de los posibles valores correspondientes al subyacente, suponiendo distribución lognormal con media $E(V_T) = V_0 e^{kt}$ y desvío $Dsv(V_T) = V_0 e^{kt} \sqrt{e^{\sigma t} - 1}$.

En la tabla 2 se presentan el valor actual de la inversión ($I_t@r$), el valor actual esperado de los flujos en cada horizonte ($E(VP)_t@k$), el valor actual esperado inicial ($VA(VP)_t$) y el desvío en los diferentes horizontes (σ_t).

Tabla 2: Variables de entrada correspondientes al modelo de simulación

t	1	2	3	4	5	10	20
$I_t@r$	760,98	723,86	688,5	654,98	623,04	485,22	294,30
$E(VP)_t@k$	1061,8	1127,4	1197,2	1271,2	1349,8	1822,1	3320,1
$VA(VP)_t$	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
σ_t	101,42	152,65	198,97	244,52	290,95	561,83	1481,77

La celda de previsión (ecuación 2) se define como $@E[\text{Max}\{(VP_5@k - \text{Inversión}_5@r); 0\}]$. Nuevamente sobre la base de 500.000 iteraciones se obtienen los resultados que se muestran en la tabla 3.

Tabla 3: Salidas estadísticas de la simulación $@E[\text{Max}\{(VP_5@k - \text{Inversión}_5@r); 0\}]$

Estadísticas	t=1	t=2	t=3	t=4	t=5	t=10	t=20
Pruebas	500000	500000	500000	500000	500000	500000	500000
Caso base	239,02	276,13	311,43	345,02	376,96	514,78	705,70
Media	239,03	276,13	311,68	346,06	377,52	515,33	705,03
Mediana	234,56	276,13	297,64	327,59	355,08	470,05	620,50
Modo	0,00	276,13	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Desviación estándar	95,25	0,00	164,83	191,06	212,83	307,34	439,71
Varianza	9.073,43	0,00	27.167,33	36.502,77	45.297,13	94.460,06	193.348,75
Sesgo	0,2963	---	0,5545	0,6282	0,6866	0,9823	1,42
Curtosis	3,11	---	3,44	3,60	3,73	4,70	6,83
Coefficiente de variación	0,3985	0,00	0,5288	0,5521	0,5638	0,5964	0,6237
Mínimo	0,00	276,13	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Máximo	717,41	276,13	1.442,95	1.732,17	1.974,13	3.692,41	6.592,70
Ancho de rango	717,41	0,00	1.442,95	1.732,17	1.974,13	3.692,41	6.592,70
Error estándar medio	0,13	0,00	0,23	0,27	0,30	0,43	0,62

En la tabla 4 se comparan los resultados entre el modelo binomial, el modelo BS y el algoritmo. Se observa el ajuste entre el modelo binomial y el modelo BS, con el algoritmo desarrollado.

Tabla 4: Valor expandido modelo, BS y binomial

Horizonte	t=1	t=2	t=3	t=4	t=5	t=10	t=20
VE=C ₀ (Modelo)	239,36	276,13	311,43	345,02	376,96	514,78	705,70
VAE=C ₀ (BS)	239,22	277,04	312,93	346,86	378,97	516,42	706,24
VAE=C ₀ (Binomial)	239,03	276,13	311,68	346,06	377,52	515,33	705,03

2.5 El algoritmo y el modelo BS en la valoración de la opción de transferencia (venta o abandono)

En el caso de una opción de transferencia, esta se asimila a un *put* financiero, por ende la variable de previsión se define como

$$P_0 = E[\max(I \cdot r - \bar{V}_0, k); 0] \quad \text{Ec 6}$$

Continuando con el ejemplo analizado en la sección 2, supóngase que la firma analiza la estrategia de transferir la licencia, intangibles e inversión física del proyecto a un valor $X = \$4.500$, con el fin de recuperar la inversión en costos, en el caso de que el valor actual esperado del proyecto en dicho momento es inferior a la cifra invertida. Utilizando el modelo BS la expresión se indica en la ecuación 7.

$$P_0 = Xe^{-rt}N(-d_2) - V_0N(-d_1) \quad \text{Ec 7}$$

Su valor es $4.500e^{-0,05 \times 5} \times 0,7802 - 2588,05 \times 0,8590 = 915,16$.

La resolución del problema aplicando el algoritmo requiere definir:

- Variable aleatoria: valor actual esperado del proyecto en $t=5$, $E(V_T) = \$4.375$, $Dsv(V_T) = \$1.345$.
- Se supone distribución lognormal;
- Tasa de costo de capital: $k = 10,5 \%$.
- Tasa libre de riesgo: $r = 5,5 \%$
- Precio de transferencia: $I = \$4.500$.
- Variable de previsión del modelo: $@E[\text{Max}\{(Inversión_5 @ r - VP_5 @ k); 0\}]$.

La estrategia de transferencia es la imagen especular de la opción de inversión diferida. Por lo tanto, su potencial valor positivo es justificado con baja curtosis (curva leptocúrtica) y leve sesgo positivo (2,01; 0,0524). En la ilustración 2 se muestra el valor esperado del proyecto, que asciende a \$912,45 (millones). El valor expandido descompuesto es $VE = VAN + VOR$; $915,06 = -1969,38 + 2884,44$.

3. Usos en otros tipos de opciones reales simples

En esta sección se ilustran adecuaciones del modelo propuesto para capturar situaciones de mayor complejidad cuando se valoran utilizando el modelo BS.

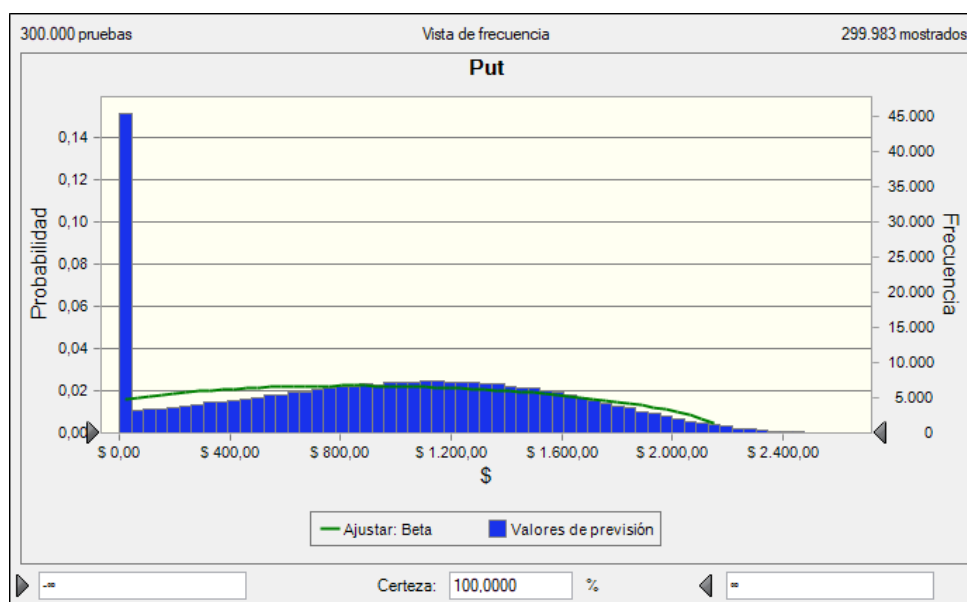
3.1 Precio de ejercicio (inversión) variable

Una de las debilidades del modelo BS al ser extrapolado directamente a la valoración de activos reales, consiste en suponer el precio de ejercicio fijo. Esta situación es válida para los contratos financieros, no siendo el caso de las inversiones en proyecto, donde la opcionalidad se mantiene por importantes intervalos de tiempo.

Tabla 5: Salidas estadísticas de la simulación
 $@E[\text{Max}\{(Inversión_5 @ r - VP_5 @ k); 0\}]$

Estadísticas	Put
Pruebas	500000
Caso base	\$ 830,02
Media	\$ 912,45
Mediana	\$ 942,79
Modo	\$ 0,00
Desviación estándar	\$ 620,20
Varianza	\$ 384.645,93
Sesgo	0,0524
Curtosis	2,01
Coefficiente de variación	0,6797
Mínimo	\$ 0,00
Máximo	\$ 2.785,35
Ancho de rango	\$ 2.785,35
Error estándar medio	\$ 1,13

Ilustración 2: Valor esperado promedio y distribución de frecuencias simulación $@E[\text{Max}\{(Inversión_5 @ r - VP_5 @ k); 0\}]$



Sin ingresar en el terreno de las opciones exóticas, el modelo propuesto permite, de una manera sencilla, suponer un precio de ejercicio variable, de la siguiente manera.

$$C_0 = E[\max(\bar{V}_0, k - I \times (1 + \bar{g}), r); 0]$$

Ec 8

La inversión adopta un comportamiento aleatorio, siendo la variable de previsión definida como $@E[\text{Max}\{(\underline{VP}_5@k-\underline{Inversión}_5@r);0\}]$. En este caso, la variabilidad en la inversión está dada por la tasa de crecimiento (g).

Siguiendo con el ejemplo de la sección 2, se procede a proyectar variabilidad en los precios correspondientes a los costos de inversión. Se supone:

- Distribución normal
- Tasa de crecimiento $e(g) = 2\%$
- Volatilidad $\sigma = 1\%$ anual.

En la tabla 6 se exponen los resultados de la corrida.

Tabla 6: Salidas estadísticas de la simulación
 $@E[\text{Max}\{(\underline{VP}_5@k-\underline{Inversión}_5@r);0\}]$

Estadísticas	Call
Pruebas	500000
Caso base	\$ 0,00
Media	\$ 23,48
Mediana	\$ 0,00
Modo	\$ 0,00
Desviación estándar	\$ 162,40
Varianza	\$ 26.372,78
Sesgo	10,68
Curtosis	160,30
Coefficiente de variación	6,92
Mínimo	\$ 0,00
Máximo	\$ 5.972,48
Ancho de rango	\$ 5.972,48
Error estándar medio	\$ 0,30

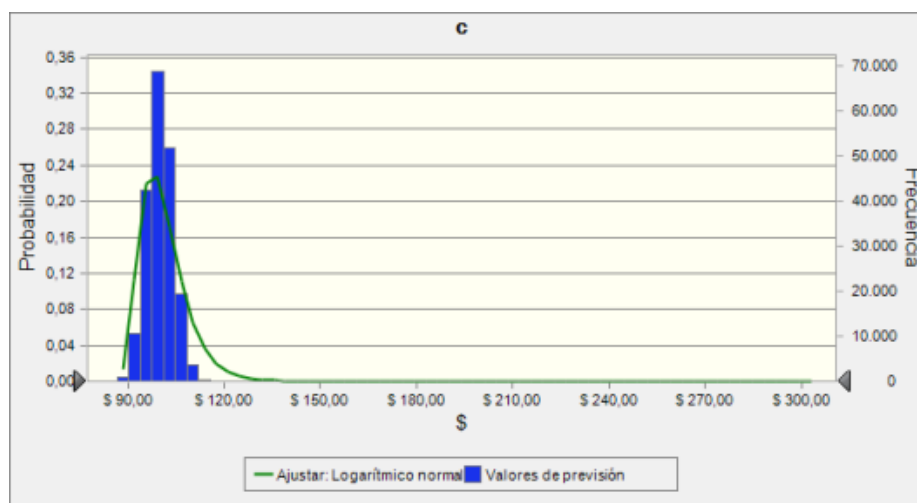
Como toda opción de inversión (*call*) el valor positivo del proyecto depende significativamente de su asimetría y curtosis ($A = \$10,68$; $K = \$160,30$). El valor medio esperado es de \$23,48 (millones) conforme surge del gráfico (ilustración 3).

El valor expandido descompuesto es $VE = VAN + VOR$; $23,82 = -1969,88 + 1993,20$.

3.2 Opción combinada: opción de inversión con diferimiento y venta de licencia

Las estrategias de inversión diferida (escenarios favorables) y transferencia de licencia (escenarios desfavorables) se asimilan a una combinación de opciones financieras de compra y venta, conocida como *long straddle*. La estrategia brinda cobertura sobre escenarios o contextos extremos (éxito – fracasos), típicos a los que enfrentan empresas de base tecnológica, proyectos I&D, nuevos lanzamientos etc. La ecuación del algoritmo queda planteada (ecuación 9).

Ilustración 3: Valor esperado promedio y distribución de frecuencias simulación $@E[\text{Max}\{(VP_5@k-\text{Inversión}_5@r);0\}]$



$$C_0 = E[\text{max}(\bar{V}_0, k - I \times (1 + \bar{g}), r); \bar{T}]$$

Ec 9

Donde T es la variable aleatoria precio de transferencia de la licencia, en este caso definida en \$100 (millones). Continuando con el caso base del apartado 2, las variables a simular son:

- V_5 (lognormal);
- g (normal)
- \bar{T} suponiendo una distribución lognormal con desvío de \$4 (millones).
- La variable de previsión se define como $@E[\text{Max}\{(VP_5@k-\text{Inversión}_5@r);T\}]$.

La tabla 7 expone los valores obtenidos. El valor esperado del proyecto es \$104,61 (millones), nuevamente con fuerte sesgo y asimetría ($A=\$22,91$; $K=694,56$).

El valor expandido descompuesto es $VE = VAN + VOR$; $104,61 = -1969,38 + 2073,99$.

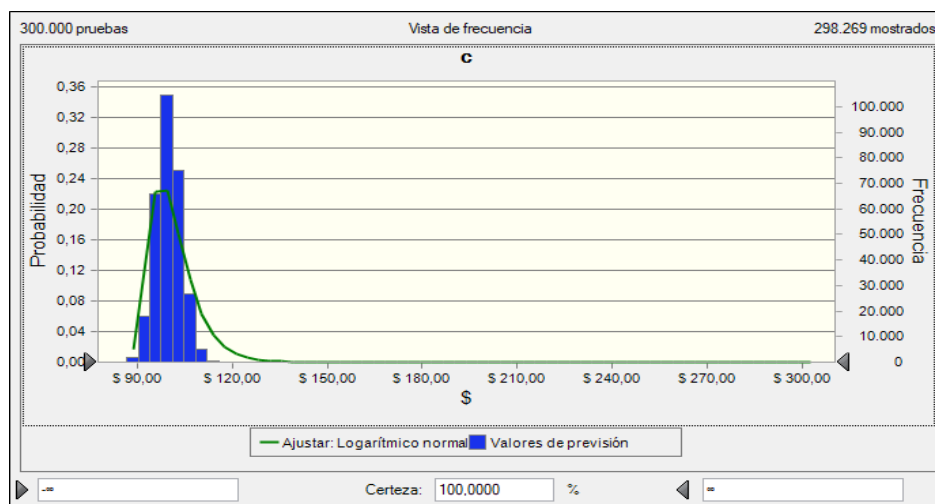
4. Conclusiones

La consideración de la flexibilidad estratégica en las inversiones, como unas de las fuentes de valor, ha provocado un mayor refinamiento y complejidad de las herramientas para valorar activos reales. Esta es la esencia y razón del porqué es importante el uso de opciones reales. Los modelos BS (Black-Scholes) y CRR binomial (Cox-Ross-Rubinstein) constituyen las versiones seminales en tiempo continuo y discreto respectivamente. No obstante, y sobre todo para los practicantes, su funcionamiento se ve opacado por la falta de claridad, en particular, respecto a manifestar cuales son los conductores de valor del proyecto (flujos de fondos esperados, tasa de costo de capital, comportamiento de la inversión) durante la vida de la opción. Esta situación, atenta contra la interpretación y difusión de estos modelos en la toma de decisiones gerenciales.

Tabla 7: Salidas estadísticas de la simulación
 $@E[\text{Max}\{(VP_5@k\text{-Inversión}_5@r); T\}]$

Estadísticas	c
Pruebas	500000
Caso base	\$ 100,00
Media	\$ 104,61
Mediana	\$ 99,95
Modo	---
Desviación estándar	\$ 71,30
Varianza	\$ 5.084,22
Sesgo	22,91
Curtosis	694,56
Coefficiente de variación	0,6816
Mínimo	\$ 83,22
Máximo	\$ 4.438,00
Ancho de rango	\$ 4.354,78
Error estándar medio	\$ 0,13

Ilustración 4: Valor esperado promedio y distribución de frecuencias
 simulación $@E[\text{Max}\{(VP_5@k\text{-Inversión}_5@r); T\}]$



Consecuentemente se corre el riesgo de rechazar (aceptar) proyectos con potencialidad de crecimiento (pérdidas), cuya opcionalidad no es cuantificada por los modelos tradicionales.

El trabajo presentó un algoritmo de simple interpretación, basado en la simulación Montecarlo. Este explicita la conexión entre flujos, tasas de costo de capital, inversión y valor del proyecto. Su implementación requiere solamente de tres pasos y algebraicamente brinda iguales resultados que el modelo BS y CRR. El modelo se adapta de manera sencilla a la valuación de situaciones complejas, por ejemplo, introduciendo comportamiento aleatorio en la inversión

(precio de ejercicio) o combinación de estrategias (inversión diferida aleatoria o precio de venta aleatorio).

Su sencillez y transparencia respecto de los conductores de valor, lo convierte en una herramienta de comunicación eficaz, posibilitando que la gerencia justifique el curso de acción seleccionado ante las diferentes capas organizacionales involucradas, sin apartarse de la racionalidad correspondiente al criterio costo-beneficio

REFERENCIAS

- Balieiro Filho, R. & Rosenfeld, R. (2004). *Testing option pricing with Edgeworth expansion*. Physica A: Statistical Mechanis and its Application, 344 (3-4): 484-490
- Black, F. & Scholes, M. (1972). *The valuation of options contracts and a test of market efficiency*. Journal of Finance, 27 (2): 399-418
- Black, F. & Scholes, M. (1973). *The pricing of options and corporate liabilities*. Journal of Political Economy, 81 (3): 637-659
- Boer, P. (2002). *The real options solutions: Finding total value in a high-risk world*. Wiley
- Borison, A. (2005). *Real options analysis: Where are the emperor's clothes?* Journal of Applied Corporate Finance, 17 (2): 17-31
- Brandao, L., Dyer, J. & Hahn, W. (2005). *Using binomial decision trees to solve real options valuations problems*. Decision Analysis, 2 (2): 69-88
- Brandao, L., Dyer, J. & Hahn, W. (2012). *Volatility estimation for stochastic project value models*. European Journal of Operational Research, 220 (3): 642-648
- Brennam, M. & Schwartz, E. (1985). *Evaluating natural resources investment*. Journal of Business, 58 (2): 135-157
- Brennan, M. & Trigeorgis L. (2000). *Project flexibility, agency and competition: New development in the theory and application of real options*. Oxford University Press.
- Brous, P. (2011). *Valuing an early-stage biotechnology investment as a rainbow option*. Journal of Applied Corporate Finance, 23 (2): 94-103
- Camara, A. & Chung, S. (2006). *Option pricing for the transformed-binomial class*. Journal of Futures Markets, 26 (8): 759-787
- Carmichael, D., Hersh, A. & Praneeth, P. (2011). *Real options estimate using probabilistic present worth analysis*. The Engineering Economist, 56 (4): 295-320
- Chance, D. & Peterson, P. (2002). *Real options and investment valuation*. The Research Foundation of AIMR.
- Chance, D., 2008. *A synthesis of binomial option pricing models for lognormally distributed assets*. Journal of Applied Finance, 18 (1): 38-56
- Collan, M., Fullér, R. & Mezei, J. (2009). *Fuzzy pay-off method for real option valuation*. Journal of Applied Mathematics and Decision Systems, Vol 2009 art 238196
- Copeland, T, & Antikarov, V. (2001). *Real options*. Texere
- Cox, J., Ross, S. & Rubinstein, M. (1979). *Option pricing: A simplified approach*. Journal of Financial Economics, 7 (3): 229-263
- Dixit, A. & Pindyck, R. (1994). *Investment under uncertainty*. Pricenton University Press
- Fornero, R. (2010). *Las prácticas en las decisiones de inversión: sus características según los estudios empíricos*. XXX Jornadas Nacionales de Administración Financiera, SADAF, págs. 83-165

- Haahtela, T. (2010). *Recombining trinomial tree for real option valuation with changing volatility*. SSRN-Social Science Research Network.
- Haahtela, T. (2011a). *Displaced diffusion binomial tree for real option valuation*. Working paper.
- Haahtela, T. (2011b). *Estimating changing volatility in cash flow simulation based real options valuation with regression sum of squared error method*. Working paper
- Haug, E.G. (2007). *Derivatives: Models on models*. Wiley
- Jabbour, G., Kramin, M. & Young, S. (2001). *Two-state option pricing: Binomial models revisited*. Journal of Futures Markets, 21 (11): 987-1001
- Jarrow, R. & Rudd, A. (1982). *Aproximate option valuation for arbitrary stochastic processes*. Journal of Financial Economics, 10 (3): 347-369
- Keema, A. (1988). *Options in real and financial markets*, Erasmus
- Kodukula, P. & Chandra, P. (2006). *Project valuation using real options: A practitioner's guide*. Ross Publishing
- Kulatilaka, N. (1988). *Valuing the flexibility of flexible manufacturing systems*. IEEE Transactions in Engineering Management, 35 (4): 250-257
- Kulatilaka, N. (1995). *Operating flexibilities in capital budgeting: Substitutability and complementary in real options*. En Trigeorgis, L. (Ed). *Real options in capital investment: Models, strategies and applications*, págs. 121-131. Praeger
- Kulatilaka, N. & Trigeorgis, L. (1994). *The general flexibility to swicht: Real options revisited*. International Journal of Finance, 6 (2): 123-145
- Mason, S. & Merton, R. (1985). *The role of contingent claims analysis in corporate finance*. En Altman, E.I. & Subrahmanyam, M. (Ed), *Recent advances in corporate finance*, págs. 7-54. Irwin
- Mathews, S., Datar, V. & Johnson, B. (2007). *A practical method for valuing real options: The Boeing approach*. Journal of Applied Corporate Finance, 19 (2): 95-104
- McDonald, R. & Siegel, J. (1986). *Investment and the valuation of firms when here is an option to shut down*. International Economic Review, 26 (2): 321-349
- Merton, R. (1973). *The theory of rational options pricing*. Bell Journal of Economics and Management Science, 4 (1): 141-183
- Milanesi, G., Pesce, G. & El Alabi, E. (2013). *Technology-based start up valuation using real opciones with Edgeworth expansion*. Journal of Financial and Accounting, 1 (2): 54-61
- Milanesi, G. y Tohmé F. (2014). *Árboles binomiales implícitos, momentos estocásticos de orden superior y valuación de opciones*. Revista de Economía Política (REPBA), 12 (7): 45-72
- Milanesi, G., 2013. *Asimetría y curtosis en el modelo binomial para valorar opciones reales: caso de aplicación para empresas de base tecnológica*. Estudios Gerenciales Journal of Management and Economics for Iberoamerica, 29 (128): 368-378
- Milanesi, G. (2014). *Modelo binomial para la valoración de empresas y los efectos de la deuda: Escudo fiscal y liquidación de la firma*. Journal of Economics, Finance and Administrative Science, 19 (36): 2-10
- Milanesi, G. (2017). *Opciones reales y función isoelástica de utilidad para valorar I&D e intangibles*. Escritos Contables y de Administración, 6 (2): 81-109
- Milanesi, G. (2019). *Predicciones de fracasos financieros con opciones reales barrera: un estudio para el mercado argentino*. Estudios en Administración, 2 (26): 56-81
- Milanesi, G. (2021). *Modelo de valoración con opciones reales, rejillas trinomial, volatilidad cambiante, sesgo y función isoelástica de utilidad*. Revista Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa, 32 (1): 257-273

- Milanesi, G. (2022). *Opciones reales secuenciales cuadrinomiales y volatilidad cambiante: Incertidumbres tecnológicas y de mercado en desarrollos de inversiones biotecnológicas*. Revista Mexicana de Economía y Finanzas (REMEF), 17 (1): 24-49
- Mun, J. (2015). *Real options analysis: Tools and techniques for valuing strategic investments and decisions with integrated risk management and advanced quantitative decision analytics*, 3rd Ed. CreateSpace Independent Publishing Platform.
- Myers, S. & Majd, S. (1990). *Abandonment value and project life*. Advances in Futures and Options Research, Vol. 4, págs. 1-21. JAI Press
- Myers, S. (1977). *Determinants of corporate borrowing*. Journal of Financial Economics, 5 (2): 147-176
- Pindyck, R. (1988). *Irreversible investment, capacity choice and the value of the firm*. American Economic Review, 78 (5): 969-985
- Rendleman, R. & Bartter, B. (1979). *Two-state option pricing*. Journal of Finance, 34 (5): 1092-1110
- Salahaldin, L. (2016). *Real options as a tool for value creation: Evidence from sustainable development and information technology sectors*. Wiley
- Shockley, R. (2006). *An applied course in real options valuation*. Thomson South-Western Finance
- Smit, H. (1997). *Investment analysis of offshore concessions in the Netherlands*. Financial Management, 26 (2): 5-17
- Smit, H. & Trigeorgis, L. (2004). *Strategic investment: Real options and games*. Princeton University Press
- Smith, J. (2005). *Alternative approach for solving real options problems*. Decision Analysis, 2 (2): 89-102
- Smith, J. & Nau, R. (1995). *Valuing risky projects: Option pricing theory and decision analysis*. Management Science, 41 (5): 795-816
- Taleb, N. (2004). *Foiled by randomness: The hidden role of chance in life and markets*. Random House
- Trigeorgis, L. (1988). *A conceptual options framework for capital budgeting*. Advances in Futures and Options Research, 3 (3): 145-167
- Trigeorgis, L. (1991). *A log-transformed binomial numerical analysis method for valuing complex multi-option investments*. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 26 (3): 309-326
- Trigeorgis, L. (1993). *Real options and interactions with financial flexibility*. Financial Management, 22 (3): 202-224
- Trigeorgis, L. (1995). *Real options in capital investment: Models, strategies and applications*. Praeger
- Trigeorgis, L. (1997). *Real options: Managerial flexibility and strategy in resource allocations*, 2nd Ed. MIT Press
- Trigeorgis, L. & Mason, S. (1987). *Valuing managerial flexibility*. Midland Corporate Finance, 5 (1): 14-21
- Wang, A. & Halal, W. (2010). *Comparison of real asset valuation models: A literature review*. International Journal of Business and Management, 5 (5): 14-24
- Wilmott, P. (2009). *Frequently asked questions in quantitative finance*, 2nd Ed, Wiley
- Wilmott, P., Howison, S. & Dewynne, J. (1995). *The mathematics of financial derivatives*. Cambridge University Press

Tabla A2: Probabilidades nodos finales modelo CRR

Horizontes	1	2	3	4	5	10	20
Probabilidades	70,511 %	49,718 %	35,056 %	24,719 %	17,429 %	3,038 %	0,092 %
	29,489 %	41,586 %	43,984 %	41,351 %	36,447 %	12,705 %	0,772 %
$\Sigma(p)$	100,000 %	8,696 %	18,395 %	25,941 %	30,485 %	23,910 %	3,067 %
	$\Sigma(p)$	100,000 %	2,564 %	7,233 %	12,750 %	26,666 %	7,696 %
		$\Sigma(p)$	100,000 %	0,756 %	2,666 %	19,517 %	13,679 %
			$\Sigma(p)$	100,000 %	0,223 %	9,795 %	18,306 %
				$\Sigma(p)$	100,000 %	3,414 %	19,140 %
						0,816 %	16,009 %
						0,128 %	10,880 %
						0,012 %	6,067 %
						0,000 %	2,791 %
					$\Sigma(p)$	100,000 %	1,061 %
							0,333 %
							0,086 %
							0,018 %
							0,003 %
							0,000 %
							0,000 %
							0,000 %
							0,000 %
							0,000 %
							0,000 %
						$\Sigma(p)$	100,000 %

Tabla A3: Valores expandidos (ecuación 5)

Horizontes	1	2	3	4	5	10	20
$\Sigma(p) \times C_{t,x-e-ert}$	\$ 223,01	\$ 221,78	\$ 207,17	\$ 186,06	\$ 162,66	\$ 66,96	\$ 7,59
	\$ 28,26	\$ 83,17	\$ 139,11	\$ 184,46	\$ 215,39	\$ 204,66	\$ 49,73
Co	\$ 251,27	\$ 0,22	\$ 17,63	\$ 51,88	\$ 96,42	\$ 271,33	\$ 153,72
	Co	\$ 305,17	\$ -	\$ 0,18	\$ 12,22	\$ 200,72	\$ 297,40
		Co	\$ 363,91	\$ -	\$ -	\$ 87,06	\$ 402,62
			Co	\$ 422,58	\$ -	\$ 19,59	\$ 403,50
				Co	\$ 486,68	\$ 0,09	\$ 308,33
						\$ -	\$ 181,67
						\$ -	\$ 81,90
						\$ -	\$ 27,06
						\$ -	\$ 5,58
					Co	\$ 850,40	\$ 0,03
							\$ -
							\$ -
							\$ -
							\$ -
							\$ -
							\$ -
							\$ -
							\$ -
							\$ -
							\$ -
						Co	\$ 706,01

Tabla A4: Valores BS (ecuación 1)

Black-Scholes	1	2	3	4	5	10	20
d1	2,538	2,155	2,054	2,033	2,047	2,253	2,732
d2	2,428	1,999	1,863	1,813	1,801	1,905	2,240
N(d1)	0,994	0,984	0,980	0,979	0,980	0,988	0,997
N(d2)	0,992	0,977	0,969	0,965	0,964	0,972	0,987
Co	\$ 239,22	\$ 277,04	\$ 312,93	\$ 346,86	\$ 378,97	\$ 516,42	\$ 706,24