42 **Jornadas Nacionales de Administración Financiera**
Septiembre 22 y 23, 2022

Una aproximación a la medición del estrés financiero

Value at risk y *Expected tail loss*

Daniel Miliá
Mauro Falcone
Universidad de Buenos Aires

SUMARIO

Para comentarios:
daniel@economicas.uba.ar
maurofalcone1996@gmail.com

Resumen

El presente trabajo brinda una noción financiera y una definición matemática de un modelo Value at Risk (VaR) paramétrico lineal. Dado su atractivo, el Value at Risk es una de las métricas de riesgo más usadas en el ámbito financiero. En el desarrollo del trabajo, se descompone el VaR en dos factores de riesgos a partir de un mapeo de factores, utilizando un modelo unifactorial basado en el Capital Asset Pricing Model y una regresión lineal a partir de Mínimos Cuadrados Ordinarios. Además, se introduce el Expected Tail Loss como un complemento al VaR, con el fin de no sólo de obtener una pérdida potencial con determinado nivel de probabilidad, sino también una pérdida esperada si se superara el umbral establecido. El modelo se testea con un caso de estudio a partir de un portafolio hipotético compuesto por acciones de Apple Inc. y Bank of America, y utilizando como benchmark el índice Standard and Poor's 500, buscando replicar la tarea de un Asset Manager a la hora de estudiar los potenciales riesgos de una cartera. Los resultados obtenidos indican el modelo lineal presentado, con importantes supuestos, tiende a subestimar los eventos de cola y la potencial pérdida de cartera. De todos modos, se concluye que estos modelos son una buena primera aproximación y logran explicar una parte importante del riesgo de la cartera.

1. Introducción

La gestión de riesgos se ha convertido en una disciplina fundamental en el mundo de las finanzas, principalmente a la hora de manejar grandes carteras. El objetivo de obtener altos rendimientos lleva a inversores a exponerse a altas volatilidades y a la potencial pérdida de gran parte del capital. Es por esto que en los últimos años cada vez se le da mayor importancia la gestión de riesgos, ya que permite buscar maximizar los rendimientos sujeto a la tolerancia al riesgo de los agentes.

El presente trabajo desarrollará de forma matemática la métrica de riesgo *Value at Risk* (VaR). Se descompondrá el VaR en dos factores de riesgos a partir de un mapeo de factores, utilizando un modelo unifactorial basado en el *Capital Asset Pricing Model* (CAPM). Además, se introducirá al *Expected Tail Loss* (ETL) como un complemento al VaR. Luego se realizará un caso de estudio a partir de un portafolio hipotético. Por último, se nombrarán las limitaciones del modelo estudiado.

2. Marco teórico

2.1 Cuantil como parámetro de riesgo y definición matemática de Value at Risk

El VaR toma como principal insumo al cuantil α, el cual determina un valor de corte:

$$P(\mathrm{X} < \mathrm{x}_\alpha) = \alpha \qquad \textit{Ec 1}$$

Si se conoce la distribución de una variable aleatoria continua puede invertirse la función de distribución acumulada $F(X)$ para obtener el valor x_α a partir de la elección del cuantil α.

$$\mathrm{x}_\alpha = \mathrm{F}^{-1}(\alpha) \qquad \textit{Ec 2}$$

Por lo que:

$$P(\mathrm{X} < \mathrm{F}^{-1}(\alpha)\,) = \alpha \qquad \textit{Ec 3}$$

De esta manera, si se tuviera una variable aleatoria continua X, podría establecerse que con un nivel de significancia α elegido, el valor mínimo de X será x_α.

A partir de esto se llega a un VaR normal lineal paramétrico a determinado nivel de significancia. Tomando una variable aleatoria X que representa los rendimientos de nuestra cartera se puede indicar que el valor x_α es el VaR dado el cuantil α. Es decir, es el valor mínimo de rendimiento, dada cierta probabilidad.

$$\mathrm{VaR}_\alpha = -\mathrm{x}_\alpha \qquad \textit{Ec 4}$$

Para utilizar un modelo paramétrico estándar, se asume que los retornos de la cartera son i.i.d., que se conoce la distribución de X y que ésta es normal.

$$\mathrm{X}^{\text{i.i.d.}} \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$$

Para encontrar el valor de corte asociado al cuantil elegido, puede realizarse una transformación para obtener una función normal estándar $Z\sim(0{,}1)$:

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} < \mathrm{x}_\alpha) = \mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{X}-\mu}{\sigma} < \frac{\mathrm{x}_\alpha-\mu}{\sigma}\right) = \mathrm{P}\left(\mathrm{Z} < \frac{\mathrm{x}_\alpha-\mu}{\sigma}\right) \qquad \textit{Ec 5}$$

A partir de (1):

$$\mathrm{P}\left(\mathrm{Z} < \frac{\mathrm{x}_\alpha-\mu}{\sigma}\right) = \alpha \qquad \textit{Ec 6}$$

Entonces por (3):

$$\mathrm{P}\big(\mathrm{Z} < \Phi^{-1}(\alpha)\big) = \alpha \qquad \textit{Ec 7}$$

$$\Phi^{-1}(\alpha) = \frac{\mathrm{x}_\alpha-\mu}{\sigma} \qquad \textit{Ec 8}$$

Por simetría de la función normal estándar se sabe que:

$$\Phi^{-1}(\alpha) = -\Phi^{-1}(1-\alpha) \qquad \textit{Ec 9}$$

Por lo que, por ecuaciones 4, 8 y 9:

$$-\Phi^{-1}(1-\alpha) = \frac{\mathrm{x}_\alpha-\mu}{\sigma} \qquad \textit{Ec 10}$$

$$\mathrm{VaR}_\alpha = \Phi^{-1}(1-\alpha)\,\sigma - \mu \qquad \textit{Ec 11}$$

Es usual que se desestime la media de los retornos cuando se calcula el VaR para períodos de tiempo muy cortos, en los que el retorno esperado es insignificante. Por lo que también podría utilizarse la siguiente fórmula para una cartera i:

$$\mathrm{VaR}_{\mathrm{i},\alpha} = \mathrm{position}_\mathrm{i}\;\Phi^{-1}(1-\alpha)\;\sigma_\mathrm{i} \qquad \textit{Ec 12}$$

2.2 Mapeo de factores de riesgo

El VaR que se obtiene a partir de este procedimiento es un VaR simple, libre de un mapeo de riesgo. Es decir que busca obtener la pérdida máxima a un nivel de confianza utilizando únicamente los retornos del portafolio, por lo que considera que toda la información del riesgo se encuentra dentro de éstos. Sin embargo, se puede ampliar el análisis a partir de un mapeo de factores de riesgo. Mediante este proceso de atribución de riesgo se descompone el nivel de pérdida esperado a partir de la sensibilidad de la cartera ante determinados factores de riesgo elegidos.

El modelo unifactorial es un modelo muy utilizado para estimar el riesgo de la cartera. Este modelo utiliza un solo factor de riesgo dentro del mapeo: el riesgo de mercado. En este caso, el riesgo sistemático proviene únicamente de este factor, y se calcula a partir de la sensibilidad de nuestra cartera ante éste.

El modelo unifactorial se basa en el modelo CAPM, el cual busca estimar el valor de un activo riesgoso en un mercado en equilibrio. Para esto se considera el rendimiento que un activo riesgoso debería tener para ser agregado a una cartera diversificada. El modelo plantea que el rendimiento en exceso de una tasa libre de riesgo esperado por activo i es igual al rendimiento en exceso esperado por el mercado en su conjunto, ajustado por el factor de sensibilidad al mercado β_i.

$$(\mathrm{R_i}) - \mathrm{R_f} = \beta_\mathrm{i}\big(\mathrm{E}(\mathrm{R_m}) - \mathrm{R_f})\big) \qquad \textit{Ec 13}$$

Para la estimación del factor de sensibilidad β se utiliza un modelo lineal en el que suele omitirse la tasa libre de riesgo (puede considerarse igual a 0), al buscar obtener una relación directa entre los rendimientos ordinarios de los activos y los del índice de mercado, y no la relación entre retornos en exceso de la tasa libre de riesgo.

$$\mathrm{E}(\mathrm{R_i}) = \alpha_\mathrm{i} + \beta_\mathrm{i}(\mathrm{E}(\mathrm{R_m})) \qquad \textit{Ec 14}$$

Una forma de considerar la tasa libre de riesgo dentro del cálculo y sin perder la relación de rendimientos ordinarios es considerar a α_i igual a $(1-\beta_i) * R_f$. El modelo entonces se plantea a partir de una regresión lineal utilizando el método de Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO) sobre la siguiente ecuación:

$$\mathrm{Y_t} = \alpha + \beta \mathrm{X_t} + \mathrm{e_t} \;\; \mathrm{e_t}^{\mathrm{i.i.d.}} \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2) \qquad \textit{Ec 15}$$

A partir de esto se puede realizar esta regresión entre los rendimientos de una cartera Y y los provistos por el mercado en su conjunto X. El estimador del parámetro β indicará la sensibilidad del portafolio a los rendimientos del mercado. Es decir, indicará el rendimiento esperado del portafolio ante movimientos del mercado, que serán medidos a partir de su volatilidad σ_m. El estimador del término de error e indica todos los factores que afectan a la variable dependiente pero que no han sido incluidos en el modelo.

En vez de tener un parámetro de riesgo explicado por el desvío de los retornos del portafolio, se tiene por un lado la estimación de nuestro β multiplicado por el desvío de los retornos del mercado σ_m, y por otro lado el error estándar del modelo σ, proveniente de los residuos de la regresión. Es decir que se separa el parámetro de riesgo en uno de riesgo sistemático ($\beta * \sigma_m$), y uno de riesgo específico (σ), al provenir de los residuos del modelo. Este último se calcula a partir de la varianza, que es homocedástica:

$$\sigma^2 = \frac{\sum e_t^2}{n-2} \qquad \textit{Ec 16}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum e_t^2}{n-2}} \qquad \textit{Ec 17}$$

A partir de estos dos parámetros se puede desagregar el riesgo:

$$\text{Total Risk} = \sqrt{\text{Systematic Risk}^2 + \text{Specific Risk}^2} \qquad \textit{Ec 18}$$

$$\sigma_i = \sqrt{\beta^2 {\sigma_m}^2 + \sigma^2} \qquad \textit{Ec 19}$$

2.3 Definición matemática de Expected Tail Loss

Hasta este punto se ha estudiado la pérdida que, con cierta confianza, se espera que no supere la cartera. Sin embargo, el VaR no indica qué pasa si ese nivel de pérdida es superado. Para estudiar qué se espera en el eventual caso en el que el VaR sea superado se debe utilizar una métrica de riesgo distinta: el ETL.

El ETL indica cuál será la pérdida esperada, sabiendo que ésta es mayor al VaR. Para eso se busca un valor esperado, sabiendo que éste es menor al perteneciente al cuantil α.

$$-E(X \mid X < x_\alpha) = -\frac{\int_{-\infty}^{x_\alpha} xf(x)dx}{\int_{-\infty}^{x_\alpha} f(x)dx} \qquad \textit{Ec 20}$$

$$-\frac{\int_{-\infty}^{x_\alpha} xf(x)dx}{\int_{-\infty}^{x_\alpha} f(x)dx} = -\frac{-\varphi(-Z)}{\Phi(-Z)} \qquad \textit{Ec 21}$$

Siendo φ la función de densidad de una distribución normal estándar.

A partir de este nuevo estadístico se obtiene el ETL, utilizando las ecuaciones 20 y 21:

$$ETL_{i,\alpha} = position_i \frac{\varphi(-Z)}{\Phi(-Z)}) \sigma_i \qquad \textit{Ec 23}$$

3. Caso de estudio

3.1 Modelización y resultados

En este punto se presenta un caso de estudio, el cual se realiza a partir de un portafolio hipotético de USD100.000 en el que se invierte la mitad del dinero en acciones de Apple Inc. y la otra mitad en acciones de Bank of America desde la primera semana del 2010 hasta la última del 2020. El portafolio sigue rebalanceos semanales con el fin de obtener la mitad del rendimiento semanal de cada acción. Se trabaja con retornos logarítmicos, lo que implica que los precios de los activos y la rentabilidad simple de éstos sigue una distribución log-normal.

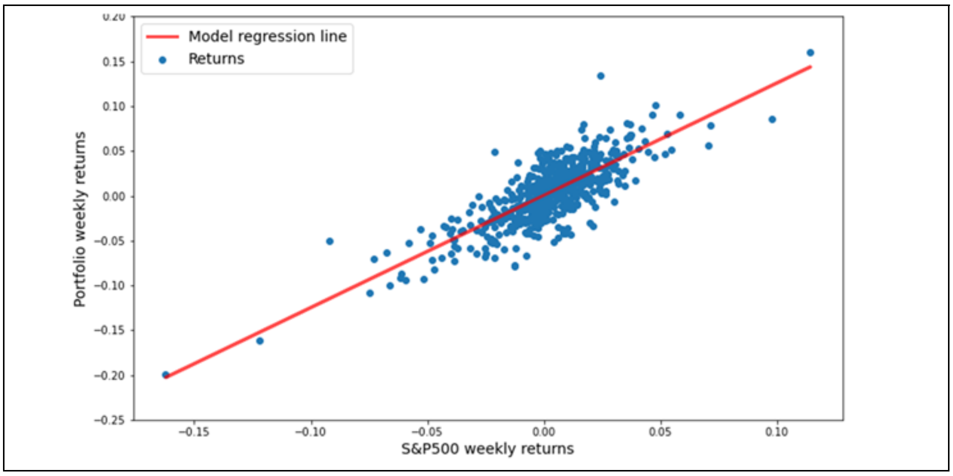
Trabajando a un nivel de confianza del 99% se obtiene un VaR sin mapeo de riesgos igual a USD8255,39:

$$VaR_{i,\alpha} = position_i\, \Phi^{-1}(1-\alpha)\, \sigma_i = 100.000 * 2{,}3263 * 0{,}0355 = 8.255{,}39$$

Para la desagregación de factores de riesgo a partir del modelo unifactorial se realiza una regresión lineal entre los retornos semanales del portafolio y los del índice S&P500 (ilustración 1). El resultado de los parámetros implica la siguiente ecuación:

$$Y_t = \alpha + \beta X_t = 0{,}0006 + 1{,}2529 X_t \; \sigma^2 = 0{,}00044$$

Ilustración 1: Regresión lineal entre retornos de portafolio y de S&P500



De esta manera se obtiene la descomposición del riesgo:

$$\text{Systematic Risk} = \beta\sigma_m = 1{,}2529 * 0{,}0228 = 0{,}02857$$

$$\text{Specific Risk} = \sigma = 0{,}021067$$

Se puede observar que gran parte del riesgo del portafolio proviene del riesgo sistemático, es decir, del riesgo de mercado.

Para el cálculo del Expected Tail Loss se busca un nuevo estadístico que magnifique el riesgo y que indicará la pérdida esperada:

$$\frac{\varphi(-Z)}{\Phi(-Z)} = 2{,}6652$$

$$ETL_{i,\alpha} = \text{position}_i \, \frac{\varphi(-Z)}{\Phi(-Z)})\sigma_i = 100.000 * 2{,}6652 * 0{,}0355 = \; 9457.90$$

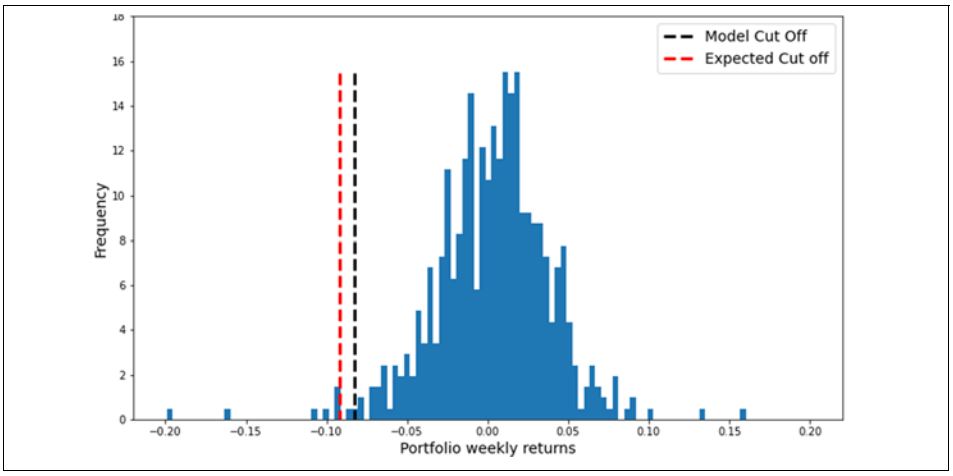
De esta manera se ve que si la cartera sufriera una pérdida mayor a USD8255,39 (VaR), el valor esperado de esa pérdida sería de USD9460,81. Esta diferencia proviene únicamente del valor Z, ya que es la única variable que se ha alterado.

3.2 Comprobación de resultados

Se puede realizar un *backtesting* de los resultados obtenidos para comprobar si el modelo se asemeja al comportamiento real de los rendimientos de una cartera con características similar a la planteada. Este tipo de comprobación de modelo busca testear el supuesto de normalidad de los rendimientos de la muestra. Esto se asemeja a una comparación entre el modelo paramétrico y uno basado en retornos históricos.

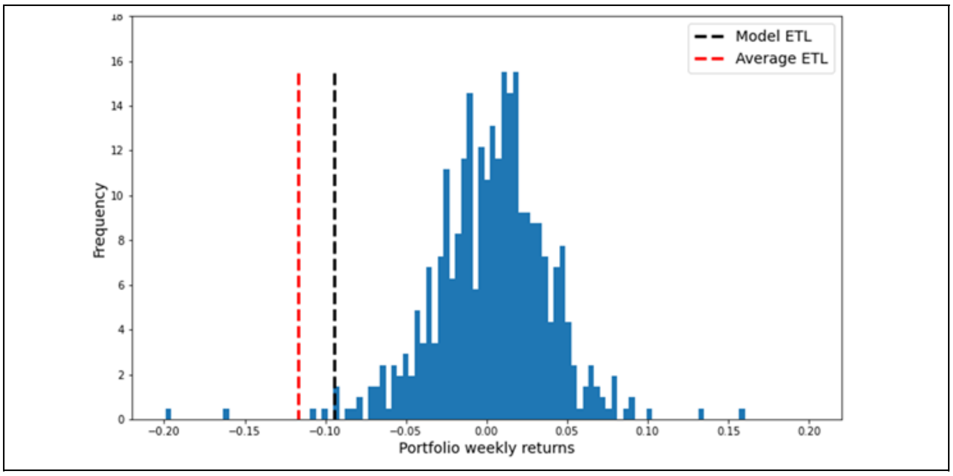
Se espera que el VaR semanal no sea superado el 99% de las veces, o análogamente, se espera que sea superado sólo el 1%. La serie de tiempo cuenta con retornos de 573 semanas, por lo que se esperaría que el VaR sea superado 5,73 veces. Sin embargo, éste es cortado 8 veces, por lo que se subestima la pérdida máxima al 99% de confianza elegido (ilustración 2).

Ilustración 2: Histograma de retornos y valores de corte (VaR)



Por su parte, para comprobar la eficacia del ETL se puede hacer un promedio de las pérdidas superiores al VaR. Este promedio es igual a USD 11.666,11, significativamente superior al ETL estimado (23,35%) (ilustración 3). Este promedio se encuentra magnificado por dos datos de la muestra, provenientes de semanas que pertenecen a febrero y marzo del 2020, en las cuales el mercado financiero norteamericano sufrió grandes pérdidas ante la conciencia de lo que implicaría la crisis del COVID-19. Estas semanas de pérdidas abruptas (-19,92% y -16,13% del portafolio en términos logarítmicos) son eventos de cola que una distribución normal no anticipa.

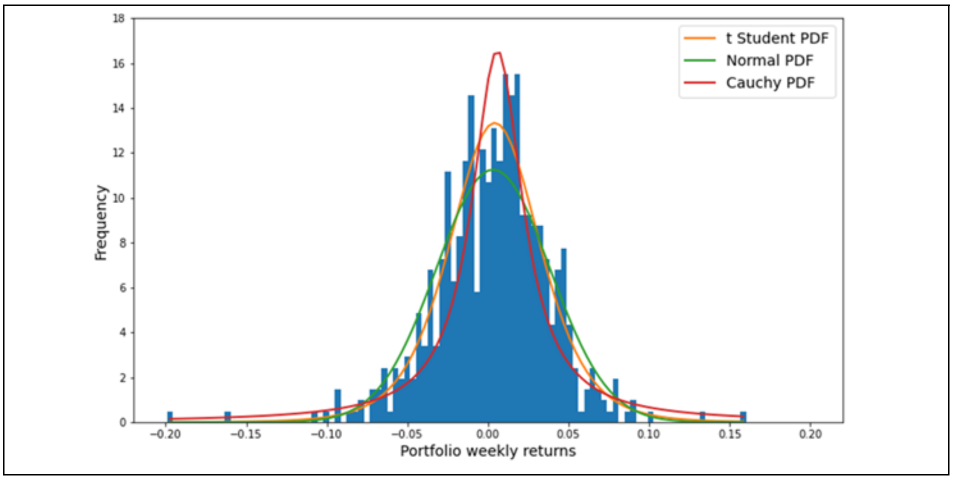
Ilustración 3: Histograma de retornos y valores de ETL



4. Limitaciones

Los modelos planteados en este trabajo se basan en el supuesto de normalidad de los retornos financieros. Este supuesto es usual en muchos modelos financieros dada la facilidad de trabajar únicamente con dos parámetros (media y desvío), aunque en general se considera un supuesto fuerte. Los retornos de los activos financieros suelen mostrar asimetría negativa y exceso de curtosis (distribución leptocúrtica). Esto implica que hay muchas observaciones cercanas a la media (principalmente a la derecha), pocas observaciones en valores intermedios entre la media y las colas, y más observaciones en las colas que las que predice una distribución normal, principalmente en la cola izquierda (los eventos extremos negativos son más frecuentes y de mayor magnitud que los positivos) (ilustración 4). Es por eso que es esperable que el modelo planteado subestime el VaR y el ETL.

Ilustración 4: Histograma de retornos y posibles distribuciones de probabilidad



Con respecto a la descomposición de riesgo en el caso de estudio, para el modelo unifactorial se realiza una regresión lineal tomando como variable explicativa los retornos de un índice de mercado. Lógicamente, al elegir los factores de riesgo que formarán parte del modelo se está exponiendo a un riesgo inherente que es la mala elección de éstos. Además, de un posible sesgo de variable omitida, también se toma el riesgo de una mala estimación de los parámetros.

Más aún, el hecho de trabajar con una regresión lineal a partir del método de MCO implica que se está estimando la sensibilidad promedio que tiene la cartera frente al riesgo de mercado. Es decir, el β es constante en el tiempo y todo dato tiene el mismo peso en su estimación. Por último, es necesario tener en cuenta que se supone la existencia de homocedasticidad en el modelo, es decir que la varianza de los errores de la regresión es constante.

5. Conclusiones

Los resultados del caso de estudio muestran que estos modelos son simples y deben basarse en algunos supuestos que pueden falsearse empíricamente. Sin embargo, y a pesar de las limitaciones planteadas, un modelo simple puede ser útil para entender la exposición al riesgo de una cartera. Más aún, alcanza con un modelo unifactorial para reconocer el origen de gran parte del riesgo de la cartera planteada. Dependiendo de la necesidad y el objetivo del estudio se pueden utilizar modelos más complejos y precisos. Sin embargo, podría considerarse que los modelos utilizados en este trabajo representan una buena primera aproximación a la estimación de riesgos de una cartera.

REFERENCIAS

Fisher, R. A. & Tippett, L. H. C. (1928). *Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample,* Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 24: 180-290

Gnedenko, B. V. (1943). *Sur la distribution limite du terme maximum of d’une série aléatoire*. Annals of Mathematics, 44: 423-453

Hilpisch, Y. (2015). *Python for Finance.* Lugar: https://www.ucm.es/data/cont/media/www/ pag-41460/ Valor%20en%20Riesgo.pdf

Jenkinson, A. F. (1955). *The frequency distribution of the annual maximum (or minimum) of meteorological elements*. Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society, 81: 158-171

Jorion, P. (2007). *Value at Risk: The new benchmark for managing financial risk,* 3rd McGraw-Hill

Novales, A. (2016). *Valor en Riesgo*. Working paper Departamento de Economía Cuantitativa, Universidad Complutense

Orange County Case: 3.1 Introduction to VAR. (2011, March 16). Orange County Value-at-Risk Case. http://merage.uci.edu/~jorion/oc/case.html#part3. Accessed 9 May 2016

Roccioletti, S. (2015). *Backtesting value at risk and expected shortfall.* Springer Gabler.

Sharpe, W. F. (1964). *Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk*. Journal of Finance, 19 (3), 425-442

Tsay, R. (2002). *Analysis of financial time series*, Wiley

Yan, Yuxing. (2017). *Python for Finance Financial modeling and quantitative analysis explained,* 2nd Ed, Packt Publishing