42 Jornadas Nacionales de Administración Financiera
Septiembre 22 y 23, 2022

Opciones reales considerando rejillas trinomiales desplazadas, volatilidad cambiante y funciones isoelásticas de utilidad

Valuación de empresa de base tecnológica

Gastón S. Milanesi
Universidad Nacional del Sur

SUMARIO

Para comentarios:
milanesi@uns.edu.ar

Resumen

La valoración de inversiones en I&D, intangibles y empresas de base tecnológica (EBT) requiere de modelos que valoren: flexibilidad estratégica, volatilidad cambiante según ciclo de vida y riesgos sin activos financieros gemelos. En mercados incompletos e imperfectos, los riesgos deben valorarse con funciones de utilidad del inversor. Por lo expuesto, se propone un modelo de valuación de opciones reales con rejillas trinomiales, volatilidad cambiante, funciones isoelásticas de utilidad y aversión al riesgo variable. Mediante un análisis de caso y estudio de sensibilidad sobre valuación de EBT, es ilustrado su funcionamiento. Los resultados obtenidos demuestran su versatilidad. El modelo captura riesgos "*privados*" y flexibilidad estratégica, como herramienta de valuación para este tipo de inversiones dentro de mercados ambiguos, imperfectos e incompletos.

1. Introducción

Un proceso de valuación implica una actividad intelectual donde se debe tomar conocimiento del activo real, objeto de valuación, con el fin de generar información cualitativa y cuantitativa para formar juicios de valor en relación al valor del activo. El resultado de la valuación es subjetivo y refleja expectativas cuantitativas relativas a la corriente de beneficios futuros del activo. En la negociación, adquirente y vendedor, parten de sus valuaciones y acuerdan un precio de transferencia que refleja las expectativas del valor del activo. Entendido como tal, el precio contiene expectativas de valor, vinculadas al espacio temporal donde se perfeccionó la transacción. En el caso de los activos financieros, con mercados desarrollados, perfectos y completos, el precio es coincidente y se ajusta rápidamente a las expectativas de los agentes, es decir al valor. En el caso de transacciones con activos reales, la velocidad de convergencia entre el valor y precio presenta menor celeridad, profundizándose en la medida que el mercado no sea perfecto, incompleto y no desarrollado.

Si a estas circunstancias, se añade el desafío de valuar empresas de base tecnológica, estrategias de innovación y desarrollo o intangibles, la divergencia entre valor y precio crece exponencialmente, ya que el último es inexistente. El agente debe formarse un juicio de valor en un contexto de mercados emergentes y para una inversión de base intangible, caracterizada por: (a) ambigüedad y/o inexistencia de información comparable o de mercado sobre los riesgos asociados a los flujos de la nueva inversión, (b) complejidad de la inversión, dada por sus múltiples fuentes de opcionalidad, volatilidades cambiantes a lo largo de su ciclo de vida y sesgos en su valor, (c) preferencias o grado de aversión al riesgo del inversor, quien por restricciones del medio, no puede replicar riesgos del proyecto con carteras de cobertura, frente a mercados no completos.

El modelo numérico de valuación debe brindar herramientas que permitan lidiar con los escollos enumerados. En tal sentido, este trabajo, propone un modelo numérico de valuación de empresas de base tecnológicas, intangibles y estrategias en I&D, entre otras, que considere los desafíos de valuación planteados. Por ello, se propone un modelo que utiliza rejillas trinomiales, con volatilidad cambiante según el estado de vida del proyecto, sesgos del valor y valoración con funciones exponenciales isoelásticas de utilidad, con grados cambiantes de aversión al riesgo. El modelo reconoce sus fundamentos y conjuga las propuestas parciales contenidas en varios trabajos (Haahtela, 2011a, 2011b; Milanesi, Pesce y El Alabi, 2014; Ochoa y Pareja Vasseur, 2014; Pareja Vasseur y Cadavid, 2016; Pareja Vasseur y Baena, 2018; Milanesi, 2018a, 2018b; Milanesi, 2019).

El trabajo presenta la siguiente estructura: en la siguiente sección se desarrolla el modelo, partiendo las rejillas binomial hacia las trinomiales. Las últimos incorporando volatilidad cambiantes y sesgos en la proyección del valor correspondiente al proyecto. Finalmente son incoporadas las funciones isoleásticas exponencias con coeficientes variables de aversión al riesgo. En la tercer sección se analiza el caso de una EBT con opción de transferencia o expansión. El modelo es sometido a un análisis de sensibilidad bivariado relativo al sesgo y amplitud de movimientos en cada nodo de la rejilla. Se compara los resultados obtenidos con el modelo binomial clásico, trinomial clásico, trinomial clásico con volatilidad cambiante, trinomial con volatilidad cambiante y sesgo. Se concluye sobre la ventajas del modelo numérico propuesto, puesto que su estructura permite incorporar los elementos que hacen a la complejidad del activo: flexibilidad estratégica, ambigüedad de datos, sesgo en su valor, riesgos cambiantes y sujetos no neutrales al riesgo.

2. El modelo trinomial con volatilidad cambiante, desplazamiento y funciones isoleásticas de utilidad

En la sección serán desarrollados los pilares del modelo numérico de valoración propuesto, comenzando con sus fundamentos en las rejillas binomiales hacia las rejillas trinomiales, la incorporación de volatilidad cambiante, sesgo en el valor esperado del subyacente y el uso de funciones isoleásticas exponenciales de utilidad.

2.1 Rejillas binomiales

Las rejillas son herramientas empleadas para proyectar el valor del activo subyacente y consecuente valorar opciones, presentando ventajas sobre los árboles de decisión debido a sus propiedades recombinantes de nodos intermedios (Smith, 2005)[1]. Se caracterizan por modelar en tiempo discreto el proceso estocástico continuo de la variable y utilizar el supuesto de valuación neutral al riesgo (Wilmott, 2009)[2]. El modelo binomial se caracteriza por:

---

[1] La propiedad de recombinación de las rejillas asegura que en el paso *N* existe *N+1* nodos finales y *n(n+1)/2* puntos de decisión mientras que en los árboles binomiales la cantidad de nodos finales asciende a 2^{n-1} y los puntos de decisión a 2^n*-1*.

[2] Se basa en la perfecta correlación entre los cambios en el valor de la opción y del activo subyacente. Una cartera compuesta por una posición larga (corta) en una opción y corta (larga) en el subyacente hace que activo riesgoso cubra las fluctuaciones en el precio del derivado. El valor de la cartera crece al tipo sin riesgo y el número exacto de subyacente a vender (comprar) se conoce como *delta*. En un mundo como el que plantea al modelo Black-Scholes, si se compran *delta* acciones empleando el modelo, entonces se cubre correctamente el riesgo eliminándolo por completo.

a. El precio del subyacente S_0 asciende a S_u, o desciende a S_d en intervalos de tiempo Δt
b. La probabilidad de transición correspondiente al movimiento ascendente es p, y su complemento para el descendente es $1-p$.

Los parámetros del modelo p, u, q y d no pueden fijarse arbitrariamente. Los valores del primer y segundo momento estocástico son derivados del proceso estocástico geométrico/aritmético browniano (Copeland & Antikarov, 2001; Milanesi, 2014a). En el límite, los modelos binomiales convergen al modelo Black-Scholes (Black & Scholes, 1972, 1973) de valoración de opciones en la medida que se cumpla con el Teorema Central del Límite.[3] El sistema de ecuaciones que deben satisfacerse para la media y varianza son,

$$E\left(\ln\left(\frac{V_t}{V_0}\right)\right) = p \cdot \ln(u) + (1-p)\ln(d) = u.\Delta t = e^{r\Delta t} \qquad Ec\ 1$$

$$Var\left(\ln\left(\frac{V_t}{V_0}\right)\right) = p(1-p)\left[\ln\frac{u}{d}\right]^2 = \sigma^2.\Delta t = e^{(2r+\sigma^2)\Delta t} \qquad Ec\ 2$$

$$p_d + p_u = 1; 0 < p < 1 \qquad Ec\ 3$$

Donde Δt es igual a T/n, T es el tiempo hasta el horizonte final de proyección y n es el número de pasos. La otra restricción en las rejillas es la condición de recombinación,

$$u.d = d.u = m^2 \qquad Ec\ 4$$

Existen tres ecuaciones y cuatro incógnitas (p, u, d y q), siendo la cuarta ecuación impuesta de manera arbitraria; Wilmott, (2009). Es aquí donde la variedad y gama de posibles formulaciones de rejillas binomiales varía en función a como se defina la última ecuación.[4]

En el tradicional modelo CRR (Cox, Ross & Rubinstein, 1979) los parámetros para la resolución del sistema de ecuaciones anterior se definen de la siguiente manera:

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \qquad Ec\ 5$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \qquad Ec\ 6$$

$$p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)\sqrt{\Delta t} \qquad Ec\ 7$$

Los valores para u, d y p son una solución exacta para la ecuación 1. El modelo CRR establece la cuarta restricción como $u.d = 1$, siendo un rasgo distintivo su propiedad de centrali-

[3] El teorema sostiene que la distribución del promedio de un conjunto de números aleatorios será normal, inclusive, si los números aleatorios al ser consideradas en forma individual no se encuentren normalmente distribuidos. Las condiciones a cumplir son: (a) los números aleatorios deben provenir de la misma distribución, (b) deben ser independientes y (c) la distribución debe tener media y varianza finita.

[4] Un desarrollo de todas las variantes del modelo binomial se puede encontrar en Van der Hoek & Elliot (2006) y Chance (2007).

dad. Esto debido a que el valor proyectado para el subyacente en la etapa *2.dt* para el nodo central es igual a su valor inicial.[5] La expresión tradicional correspondiente a las probabilidades de transición (ecuación 3) es: (Whaley, 2006)

$$\mathrm{p} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{r}\Delta \mathrm{t}} - \mathrm{d}}{\mathrm{u} - \mathrm{d}} \qquad \textit{Ec 8}$$

Si $\Delta t > \frac{\sigma^2}{\mu^2}$ el modelo da probabilidades negativas porque: $p = \frac{e^{r\Delta t} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}} > 1$. El modelo tiene la misma media que el proceso lognormal del subyacente, pero, independientemente del tamaño de Δt la varianza solamente coincide en el límite. Otra propuesta de rejilla binomial es el modelo de Rendleman & Bartter (1979) y Jarrow & Rudd (1982).

En este modelo se sostiene que la mejor aproximación al valor esperado y media del proceso browniano ocurre si $\mu = r - \frac{\sigma^2}{2}$. Implica que las probabilidades de transición tienen valor $p_u = p_d = 1/2$[6] . Los parámetros para resolver el sistema de ecuaciones son: $u = e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}}$; $d = e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t}}$ y $u.d = e^{2\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t}$. Los parámetros *u* y *d* generan una solución para la media y varianza, al ser *p=1/2* y $\mu = r - \frac{\sigma^2}{2}$. Arrojan la misma media y la varianza del proceso lognormal independientemente del tamaño de Δt, por lo tanto, la rejilla es estable, presenta volatilidad consistente y converge de forma más rápida a la solución analítica que su par CRR (Jarrow & Rudd, 1982; Jabbour, Kramin &Young, 2001).

2.2 Rejillas trinomiales

Las rejillas trinomiales comparadas con su par binomial, describen una mayor cantidad de movimientos futuros del subyacente, convergiendo con mayor velocidad a los resultados generados por el modelo continuo, por nodo presenta tres movimientos (*u, m y d*). Las rejillas trinomiales pueden construirse respetando las premisas utilizadas para su par binomial,[7] siendo:

a) probabilidades de transición son positivas en el límite entre 0 y 1 debiendo ser su suma equivalente a la unidad: $p_u + p_m + p_d = 1$
b) media (*M*) y varianza (*V*) de la distribución trinomial debe ser igual a los primeros dos momentos estocásticos de la distribución lognormal: $p_u S_u + p_m S_m + p_d S_d = M$; $p_u(S^2u^2 - S^2M^2) + p_m(S^2m^2 - S^2M^2) + p_d(S^2d^2 - S^2M^2) = S^2M^2V$, donde $M = e^{r\Delta t}$ y $V = e^{\sigma^2\Delta t} - 1$.

---

[5] Sustituyendo los valores de *u*, *d* y *p* en la parte izquierda de la varianza (ecuación 2), se tiene $\sigma^2\Delta t.\left(1 - \frac{\mu^2\Delta t}{\sigma^2}\right)$. Con valores pequeños de Δt, la segunda ecuación el modelo aproxima a la segunda ecuación del sistema. Para intervalos grandes, cuando $\left(1 - \frac{\mu^2\Delta t}{\sigma^2}\right) < 0$ o $\Delta t > \frac{\sigma^2}{\mu^2}$, la ecuación de la varianza de la rejilla presenta sesgo negativo (Trigeorgis, 1991).

[6] La propiedad de que las probabilidades neutrales al riesgo deben ser ½ se atribuye a Jarrow & Rudd, (1982)

[7] Puede verse Boyle (1988), Kamrad & Ritchken (1991), Tian (1993), Derman, Kani & Chriss (1996), Van der Hoek & Elliot (2006), Whaley (2006), Chance (2007), Guthrie (2011), Hull (2012).

Conforme fue analizado, el modelo binomial plantea dos parámetros: *u, d* y *m=1*. Boyle (1988) y Kamrad & Ritchken (1991) plantean un valor λ que regula la amplitud de los movimientos laterales de manera directamente proporcional. El valor de λ es directamente proporcional a la amplitud de movimientos, mayor el valor del coeficiente mayor la probabilidad de movimientos laterales, siendo $\lambda \geq 1$. El coeficiente de ascenso tiene la forma funcional $u=e^{\lambda\sigma\sqrt{\Delta t}}$, $d=e^{\lambda-\sigma\sqrt{\Delta t}}$ y $m=u.d.$ Fijando $u.d=1$ y sujeto a las condiciones de media y varianza, Boyle plantea las probabilidades de transición como,

$$p_u = \frac{(V + M^2 - M)u - (M - 1)}{(u - 1)(u^2 - 1)} \qquad \textit{Ec 9}$$

$$p_d = \frac{u^2(V + M^2 - M) - u^3(M - 1)}{(u - 1)(u^2 - 1)} \qquad \textit{Ec 10}$$

$$p_m = 1 - p_u - p_d \qquad \textit{Ec 11}$$

Cuando el coeficiente λ es igual a 1 el modelo arroja similares resultados que el modelo binomial, ya que la probabilidad de no cambio en el precio es igual a 0 esto provoca la eliminación de los nodos del medio. Consecuentemente, el coeficiente de ascenso se resume a, $u=e^{\lambda\sigma\sqrt{\Delta t}} = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$ y las probabilidades de movimientos ascendentes y descendentes quedan iguales al modelo de Cox, Ross & Rubinstein (1979). Otros planteamientos son los de Tian (1993) y Derman, Kani & Chriss, (1996) donde asignan valor de 1/3 a las probabilidades de transición.

2.3 Rejillas trinomiales y volatilidad cambiante

Siguiendo el modelo propuesto por Haahtela (2011a), trabajar con rejillas trinomiales y volatilidades cambiantes para diferentes periodos, requiere fijar la condición de recombinación de los nodos intemedios. Es menester que se cumpla la siguiente condición:

$$u.d = m^2 \qquad \textit{Ec 12}$$

La centralidad se encuentra asegurada por la condición $m=e^{r\Delta t}$. La lógica del modelo consiste en calcular probabilidades de transición en base a la mayor volatilidad (σ_{max}). Los movimientos de ascenso y descenso correspondientes al subyacente se estiman con la máxima volatilidad, partiendo de las siguientes expresiones:

$$u = e^{r\Delta t + \sqrt{e^{(\lambda\sigma_{max})^2\Delta t - 1}}} \qquad \textit{Ec 13}$$

$$d = e^{r\Delta t - \sqrt{e^{(\lambda\sigma_{max})^2\Delta t - 1}}} \qquad \textit{Ec 14}$$

$$m = e^{r\Delta t} \qquad \textit{Ec 15}$$

Las probabilidades de transición para el máximo periodo de volatilidad son:

$$p_{u(max)} = \frac{m^2(e^{\sigma_{max}^2\Delta t} - 1)}{u^2 + md - um - ud} \qquad \textit{Ec 16}$$

$$p_{d(max)} = p_u \left(\frac{m-u}{d-m}\right) \qquad \textit{Ec 17}$$

$$p_{m(max)} = 1 - p_u - p_d \qquad \textit{Ec 18}$$

Las probabilidades de transición para los periodos de menor volatilidad se derivan de las ecuaciones anteriores, a partir de proporcionar niveles de volatilidad,

$$p_u^i = p_{u(max)} \left(\frac{\sigma_i}{\sigma_{max}}\right)^2 \qquad \textit{Ec 19}$$

$$p_d^i = p_{d(max)} \left(\frac{\sigma_i}{\sigma_{max}}\right)^2 \qquad \textit{Ec 20}$$

$$p_m^i = 1 - \ p_u^i - p_d^i \qquad \textit{Ec 21}$$

La mecánica para la construcción de la rejilla es similar a las ya tratadas en el trabajo, primero se proyecta el proceso estocástico del subyacente para luego introducir los flujos de pagos de la opción en el modelo. El proceso recursivo de valuación de la opción ser realiza con las probabilidades de transición para los niveles de volatilidad,

$$V_{t-1} = \frac{p_u^i V_{t,u} + p_m^i V_{t.m} + p_d^i V_{t,d}}{e^{r\Delta t}} \qquad \textit{Ec 22}$$

2.4 Modelo trinomial desplazado

En el caso de valorar opciones reales de proyectos del tipo *startups* EBT, con sesgos en la distribución de los valores posibles, una alternativa consiste en adaptar el modelo trinomial partiendo del binomial desplazado [8] (Haahtela, 2011b), Milanesi, Pesce y El Alabi, 2014) en adelante BD. Adicionalmente permite trabajar con valores negativos del proyecto (subyacente). Asimismo, la forma funcional de la distribución de posibles valores de este es un intermedio entre la normal y lognormal, siendo asimétrica [9] y, a diferencia de la propuesta de Rubinstein (1983), el parámetro de desplazamiento (θ) se incorpora fuera del proceso estocástico.

En efecto, la forma de la distribución se descompone en dos partes: (a) probabilística; donde el valor del activo subyacente (V_θ) sigue un proceso geométrico browniano; (b) parámetro de desplazamiento (θ) determinístico (Camara & Chung, 2006).

La ecuación que describe el proceso estocástico del subyacente hasta el horizonte T es

$$V_{\theta,T} = V_{\theta,0} e^{(\mu - 1/2\sigma_\theta^2)T + \sigma_\theta\sqrt{T}z} + \theta_0 e^{\mu t} \ z \sim N(0,1) \qquad \textit{Ec 23}$$

---

[8] Este es una adaptación del proceso difusión desplazado empleado en la valoración de derivados financieros (Rubinstein, 1983).

[9] Es una manera intuitiva y flexible de incorporar potenciales sesgo en los valores proyectados de manera determinística o sensibilizando. Se lo puede incorporar en el conjunto de propuestas donde el modelo binomial es transformado para capturar momentos estocásticos de orden superior (Baliero Filho & Rosenfeld, 2004; Milanesi, 2012, 2014b).

Donde V_θ es el valor con desplazamiento, la volatilidad desplazada es σ_θ y θ constituye el parámetro de desplazamiento *(V_θ, σ_θ, θ)*. El valor esperado y desvío del subyacente en el horizonte *T* está dado por las siguientes expresiones,

$$V_{\theta t} = \left(V_{\theta,0} + \theta_0\right)e^{\mu t} \qquad \textit{Ec 24}$$

$$\sigma_\theta(V_t) = \left|V_{\theta,0}\right|e^{\mu t}\sqrt{e^{\sigma_\theta^2 t} - 1} \qquad \textit{Ec 25}$$

V_θ se expresa en términos absolutos debido a que puede tomar valores negativos o positivos. El principal insumo para la construcción de la rejilla, en este caso trinomial, proviene de la volatilidad del subyancente (σ_θ). Para su estimación se parte de los parámetros V_θ y θ de la ecuación (24), por iteración se obtiene σ_θ, en donde se fija como restricción el valor $\sigma_\theta(V_t)$. El valor correspondiente al desvío sesgado $\sigma_\theta(V_t)$ es obtenido aplicando análisis de escenarios y simulación. En el caso de volatilidades cambiantes los valores $\sigma_\theta i(V_t)$ corresponden a cada nivel de volatilidad, iterando sobre la ecuación 25 se obtiene los valores para la máxima volatilidad desplazada $\sigma_\theta\ max(V_t)$ y las volatilidades correspondientes a cada periodo $\sigma_\theta\ i(V_t)$. La máxima volatilidad permite construir los movimientos del subyacente a través de las ecuaciones 12, 13 y 14

$$u_\theta = e^{r\Delta t + \sqrt{e^{(\lambda\sigma_\theta \max(V_t))^2}\Delta t - 1}} \qquad \textit{Ec 26}$$

$$d_\theta = e^{r\Delta t - \sqrt{e^{(\lambda\sigma_\theta \max(V_t))^2}\Delta t - 1}} \qquad \textit{Ec 27}$$

$$u_\theta . d_\theta = m^2 \qquad \textit{Ec 28}$$

La centralidad queda asegurada mediante la ecuación 15 ($m = e^{r\Delta t}$), el valor del proyecto para Δt para la rejilla trinomial sesgada se estima,

$$V_{\theta,u,d,m,(t+1)} = \left(u_\theta . V_{\theta,t} + |\theta_0|.e^{r\Delta t}\right); \left(m.V_{\theta,t} + |\theta_0|.e^{r\Delta t}\right); \left(d_\theta . V_{\theta,t} + |\theta_0|.e^{r\Delta t}\right) \qquad \textit{Ec 29}$$

$V_{\theta,t}$ es el valor desplazado de los activos riesgosos del proyecto, θ_0 el valor correspondiente al parámetro de desplazamiento, *r* el tipo de interés sin riesgo. El movimiento (*u, m y d*) es ajustado sumando el valor absoluto del sesgo capitalizado por los periodos ($|\theta_0|.e^{r\Delta t}$).

A partir de los movimientos sesgados obtenidos en las expresiones 26, 27 y 28, y en base a las expresiones 16, 17 y 18 se construyen las probabilidades de transición desplazadas,

$$p_{u\theta(max)} = \frac{m^2\left(e^{\sigma\theta_{max}^2\Delta t} - 1\right)}{u_\theta^2 + md_\theta - u_\theta m - u_\theta d_\theta} \qquad \textit{Ec 30}$$

$$p_{d\theta(max)} = p_{u\theta}\left(\frac{m - u_\theta}{d_\theta - m}\right) \qquad \textit{Ec 31}$$

$$p_{m\theta(max)} = 1 - p_{u\theta} - p_{d\theta} \qquad \textit{Ec 32}$$

Luego las probabilidades intermedias en donde el ajuste es proporcional a las volatilidades sesgadas,

$$p^{i}_{u\theta} = p_{u\theta(max)}\left(\frac{\sigma\theta_{i}}{\sigma\theta_{max}}\right)^{2} \qquad \textit{Ec 33}$$

$$p^{i}_{d\theta} = p_{d\theta(max)}\left(\frac{\sigma\theta_{i}}{\sigma\theta_{max}}\right)^{2} \qquad \textit{Ec 34}$$

$$p^{i}_{m\theta} = 1 - p^{i}_{u\theta} - p^{i}_{d\theta} \qquad \textit{Ec 35}$$

El valor teórico de la opción se obtiene recursivamente

$$V_{\theta(t-1)} = \frac{p^{i}_{u\theta}V_{\theta t,u\theta} + p^{i}_{m\theta}V_{\theta t.m\theta} + p^{i}_{d\theta}V_{\theta t,d\theta}}{e^{r\Delta t}} \qquad \textit{Ec 36}$$

2.5 Función de utilidad isoelástica y el modelo trinomial desplazado con volatilidad cambiante

El uso de funciones de utilidad para valuar los nodos de la rejilla trinomial permite la incorporación del grado de aversión al riesgo del agente. El uso de funciones de utilidad exponenciales del tipo isoelásticas, son herramientas empleadas en rejillas binomiales (Ochoa y Pareja Vasseur, 2014; Pareja Vasseur y Cadavid, 2016; Milanesi, 2018; Milanesi, 2019). Las funciones de utilidad isoelásticas constituyen un caso especial de la forma hiperbólica de aversión absoluta al riesgo (*HARA*) (Merton, 1992) y satisfacen la condiciónes de derivada primera positiva y segunda negativa $(U'(W) > 0)$; $(U''(W) < 0)$. Conocidas con las siglas *CRRA*, presentan las siguientes características:

$$U(W) = \begin{cases} \dfrac{W^{\gamma} - 1}{1-\gamma} \rightarrow \gamma > 0;\ \gamma \neq 1 \\ \log(W) \rightarrow \gamma = 1 \end{cases} \qquad \textit{Ec 37}$$

En la ecuación 37, γ representa el nivel de aversión al riesgo cumpliendo con: la condición de Inada,[10] aproximándo la utilidad marginal a valores de infinito para riquezas tendientes a cero pero sin permitir utilidad con riqueza igual a cero (Suen, 2009), posibilitando la elasticidad de sustitución intertemporal constante, como condición para asegurar la existencia de equilibrio

[10] La condición se conoce con el apellido del economista japonés Ken-Ichi Inada, formulada para la función de producción garantizando el crecimiento económico en los modelos neoclásicos de crecimiento. El valor de la función es cero en cero; es diferenciable en todos sus puntos, creciente en *x*, con derivada decreciente (cóncava), el límite de la derivada cercana al origen es infinito y el límite de la derivada hacia el infinito positivo es cero. La función de utilidad converge a la logarítmica con gamma tendiendo a 1, con la regla de L'Hôpital, donde con $\gamma \rightarrow 1$ numerador y denominador de la función tienden a cero. Al ser diferenciados con respecto a γ, para tomar el límite de la relación de las derivadas cuando $\gamma \rightarrow 1$, la función de utilidad converge a logarítimica (Ochoa y Pareja Vasseur, 2014). Los valores negativos describen una conducta favorable al riesgo, o en otras palabras, su prima por riesgo es negativa. Cabe destacar que los valores extremos -1 y 1 son los extremos de la función que no explican comportamientos observables.

balanceados (Ljungqvist & Sargent, 2000). La medida de aversión al riesgo (γ) es crucial en la ecuación 37 y es objeto de inumerables calibraciones producto de investigaciones empíricas.[11]

En teoría γ debe fluctuar entre -1 y 1 (Pratt, 1964). El valor que arroja el coeficiente depende de las características del individuo, los valores negativos representan personas favorables al riesgo, los positivos aversos y cero corresponde a personas neutrales al riesgo. En el modelo propuesto, la medida de aversión al riesgo se supondrá variable en el tiempo, a mayores horizontes de tiempo, mayor aversión al riesgo (γ_t) producto de una mayor incertidumbre.

En el modelo, el valor de la riqueza (W), es sutituido por el valor proyectado del subyacente $V_{\theta,u,d,m,(t+1)}$, obtenido mediante la ecuación 29. Este es el valor correspondiente al subyacente proyectado con la rejilla trinomial, volatilidad cambiante y sesgo. El grado de aversión al riesgo γ se introduce en la función de utilidad (ecuación 36), quedando la siguiente expresión,

$$U(V_{\theta,u,d,m,(t+1)}) = \begin{cases} \dfrac{{V_{\theta,u,d,m,(t+1)}}^{\gamma_t} - 1}{1-\gamma} \rightarrow \gamma > 0; \gamma_t \neq 1 \\ \log(V_{\theta,u,d,m,(t+1)}) \rightarrow \gamma_t = 1 \end{cases} \qquad \textit{Ec 38}$$

La utilidad esperada $E[U(V_{\theta,u,d,m,(t+1)})]$, se obtiene empleando los coeficientes equivalentes ciertos implícitos sesgados, para cada nivel de probabilidades: probabilidades de transición máximas, ecuaciones 30, 31 y 32; probabilidades de transición intermedias, ecuaciones 33, 34 y 35. Estas son aplicadas recursivamente en cada nodo con la lógica de la ecuación 36,

$$E[U(V_{\theta,u,d,m,(t+1)})] = \{[p^i_{u\theta} U(V_{\theta t,u\theta})] + [p^i_{m\theta} U(V_{\theta t,m\theta})] + [p^i_{d\theta} U(V_{\theta t,d\theta})]\} \qquad \textit{Ec 39}$$

La utilidad esperada permite calcular el coeficiente equivalente cierto. En el caso que el agente sea neutral al riesgo (γ=0), el valor obtenido es el mismo que el que arroja el modelo trinomial con volatilidades cambiantes.

$$CE(V_{\theta,u,d,m,(t+1)}) = \{E[U(V_{\theta,u,d,m,(t+1)})] \times (1-\gamma_t)\}^{\frac{1}{1-\gamma_t}} \qquad \textit{Ec 40}$$

El equivalente cierto obtenido se actualiza al tipo sin riesgo con la siguiente expresión,

$$CE(V_{\theta,u,d,m,(t)}) = CE(V_{\theta,u,d,m,(t+1)}).e^{-r} \qquad \textit{Ec 41}$$

El proceso recursivo brinda una medida monetaria, que incorporada en la función de utilidad, arroja el nivel de utilidad adaptado al coeficiente de aversión al riesgo del agente. Esta surge de la siguiente ecuación,

$$U(V_{\theta,u,d,m,(t)}) = \begin{cases} \dfrac{CE(V_{\theta,u,d,m,(t)})^{\gamma_t} - 1}{1-\gamma} \rightarrow \gamma > 0; \gamma_t \neq 1 \\ \log\left(CE(V_{\theta,u,d,m,(t)})\right) \rightarrow \gamma_t = 1 \end{cases} \qquad \textit{Ec 42}$$

El modelo trinomial con volatilidad cambiante y aversión al riesgo coincide con los resultados del modelo binomial clásico si:, si $\bar{\gamma}_t$=0 constante en todo periodo de tiempo

[11] No es objeto en el presente trabajo analizar las mismas, que se pueden encontrar en Pareja Vasseur y Baena (2018) y Chavez, Milanesi y Pesce (2019).

(neutralidad al riesgo); $\lambda = 1$ (equidistancia entre ascenso y descenso simular a binomial), $\overline{\sigma_\theta}$ (volatilidad constante) y $\theta = 0$ (inexistencia de sesgo).

3. Funcionamiento del modelo. Análisis de caso

En este trabajo no se persigue obtener soluciones estadísticas generalizables, por el contrario, se busca estudiar y poner de manifiesto el comportamiento del conjunto de variables que componen el modelo propuesto y sus interacciones, con el fin de justificar su funcionamiento bajo un determinado paradigma del conocimiento, en este caso, los modelos numéricos de valuación de activos reales. Como consecuencia de ello, la metodología seleccionada es el estudio de casos en administración.[12]

El estudio de caso consiste en un proyecto de inversión en I&D con características distintivas respecto de las inversiones tradicionales, debido al grado de flexibilidad estratégica (opcionalidad) intrínseca generadas por las barreras de entrada (Rubio Martín y Lamothe Fernández, 2010; Milanesi, 2018)[13]. En este tipo de inversiones el perfil del inversor juega un rol preponderante,[14] pues este tipo de emprendimientos se caracteriza por alta incertidumbre, requerimientos constantes de aportes de capital y desarrollos pautados para horizontes prolongados de tiempo.[15]

---

[12] Debe remarcarse que el estudio de casos, entendido como enfoque metodológico, no debe confundirse con el análisis de casos, entendida como un instrumento de enseñanza. La última busca analizar un aspecto concreto relacionados con las organizaciones para fomentar el debate o discusión, mientras que la primera pretende indagar sobre proposiciones teóricas con el objeto de ampliar y generalizar una teoría (Yin, 1994; Castro Monge, 2010).

[13] Presentan dos características objetivas: a) En los sectores altamente innovadores, los costos de fabricación juegan un rol secundario para definir el precio final del producto, siendo la principal inversión en investigación y desarrollo (I+D), por ende el costo del capital sea uno de los principales factores para explicar el costo del producto. b) Existencia de barreras de entrada siendo una forma de proteger la innovación, a través de patentes, modelos de utilidad, etc.

[14] Puede ser: (a) *Inversores aportantes del capital semilla:* En esta fase la figura del inversor suele ser el propio emprendedor (investigador o consorcios, agencias de investigación, universidades). Mediante el mecanismo de subsidios se obtiene el capital inicial que sirve para financiar los desarrollos de la fase de prototipo y eventualmente primeras etapas empresariales. (b) *Inversores ángel* y capital de riesgo: agentes e inversores institucionales que asumen riesgo invirtiendo en la etapa inicial a cambio de participación accionarial, asumiendo un elevado nivel de riesgo. (c) *Private equity:* inversores institucionales en empresas cerradas maduras y sostenibles en el tiempo. Por lo general la inversión apunta a crear valor en la firma, al detectar un *management* deficiente o potenciales sinergias en su cartera de negocios. Aportan capital y/o equipo de gerencia.

[15] Sus etapas o fases de vida son: (a) *Etapa preindustrial:* madurada la idea, se determina su viabilidad tanto técnica como empresarial, se ingresa en una etapa preindustrial caracterizada por una fuerte aplicación de recursos y una intensa labor de I+D. (b) *Lanzamiento al mercado:* en caso de que los resultados de la investigación sean positivos, y tras la protección de la innovación generalmente mediante patente, se entra en una fase de comercialización. (c) *Etapa de crecimiento:* caracterizada generalmente por un fuerte incremento de ingresos, hasta que se llega a un punto de equilibrio en el que se satura el mercado, (d) *Etapa de madurez:* la duración de este período dependerá del tiempo de explotación de

Se supone un emprendimiento de base tecnológica, el cual se encuentra en su etapa de desarrollo, previéndose un horizonte para la finalización de pruebas y homologación para su lanzamiento en el mercado de 4 periodos (*t=4*). El valor actual estimado por el método de descuento de flujos de fondos requiere de utilizar el enfoque MAD (*Marketed Asset Disclaimer*), ya que el caso bajo estudio carece de precios observable del riesgo, al no tener activos financieros que repliquen sus flujos de fondos. El valor del proyecto es V_0*=-\$100* (miles). Si se considera este valor sin analizar las alternativas estratégicas, debe rechazarse la I&D del proyecto por carecer de valor económico.

No obstante, existen alternativas estratégicas, y conforme fue expuesto, son las que dan sentido y valor a este tipo de proyectos. En el caso bajo estudio, existen dos alternativas ejercibles en *t=4*; : a) desarrollar la etapa de comercialización del producto, con una inversión estimada de I=\$3.000 (miles), b) transferir la licencia, con un ingreso de \$9 (miles) y costo de transferencia de \$2,35 (miles). La cantidad de pasos para construir la rejilla binomial es de *n=8,* con un $\Delta t=0,5$. La tasa libre de riesgo es 5% anual, se supone un sesgo (θ) en el valor esperado del activo de |*\$1.000*|. La rejilla trinomial tiene un coeficiente de dispersión entre nodos (λ) de 1,5. El coeficiente de aversión al riesgo se supone cambiante y creciente a medida que el horizonte temporal se hace distante, en consonancia con la mayor incertidumbre percibida por el inversor, siendo de $\gamma_1=0,4;\ \gamma_2=0,56;\ \gamma_3=0,7;\ \gamma_4=0,8$; un comportamiento claramente adverso al riesgo.

Para estimar la volatilidad desplazada correspondiente a cada periodo se parte de las ecuaciones 24 y 25. La primera sirve para proyectar el valor sesgado del subyacente mediante escenarios y simulación (Milanesi, Pesce y El Alabi, 2014). Con el valor del desvío estándar sesgado para cada nivel de volatilidad $\sigma_\theta i(V_t)$ iterando se obtiene el valor porcentual de $\sigma_\theta i$ para la máxima volatilidad y el resto de las volatilidades. En la siguiente tabla se exponen las variables de entrada del modelo

Tabla 1: Variables de entrada del modelo, valor esperado, volatilidad y aversión al riesgo para diferentes horizontes

Periodo	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*
$V_{\theta t} = (V_{\theta,0} + \theta_0)e^{\mu t}$	\$ 900,00	\$ 946,14	\$ 994,65	\$ 1.045,65	\$ 1.099,26
$\sigma_\theta i(V_t)$	\$ -	\$ 460,00	\$ 582,00	\$ 658,00	\$ 721,00
$\sigma_\theta i$		46,06%	38,37%	33,35%	29,91%
γ	0	0,40	0,56	0,7	0,8

Los valores de la tabla 1 permiten obtener los coeficientes de ascenso, descenso y medio (ecuaciones 26, 27 y 28), las probabilidades de transcisión desplazadas de máxima volatilidad (ecuaciones 30, 31 y 32) y las probabilidades de transición intermedias, proporcionadas a cada nivel de volatilidad (ecuaciones 33, 34 y 35), conforme se expone en la tabla 2.

---

la patente y de la introducción de nuevos productos, servicios y/o tecnologías, que traerán consigo una pérdida de cuota de mercado (e) *Etapa de declive:* caracterizada por un decrecimiento de los ingresos, hasta un punto en el que el proyecto/empresa no sea sostenible.

Tabla 2: Parámetros rejilla trinomial desplazada con volatilidad cambiante

Periodo	*1*	*2*	*3*	*4*
u_θ	1,72329055	1,72329055	1,72329055	1,72329055
m_θ	1,02531512	1,02531512	1,02531512	1,02531512
d_θ	0,61003706	0,61003706	0,61003706	0,61003706
$p_{u\theta(\max)}$	0,1514269			
$p_{m\theta(\max)}$	0,5940635			
$p_{d\theta(\max)}$	0,2545096			
$p_{u\theta}^{i}$		0,10506498	0,07935907	0,06383916
$p_{m\theta}^{i}$		0,71834785	0,78725879	0,82886367
$p_{d\theta}^{i}$		0,17658717	0,13338215	0,10729717

Las probabilidades de transición se ajustan en función al coeficiente λ, a mayor coeficiente, mayor peso cobra m, tendiendo a 1, los extremos (u y d) tienden a su par binomial. Para proyectar el recorrido del subyacente es utilizada la ecuación 29, donde primero se proyecta el valor con sesgo y luego este es extraído. La rejilla queda expuesta de la siguiente manera,

Tabla 3: Valor del proyecto en la rejilla trinomial

0	*1*		*2*		*3*		*4*	
$ -100,00	$ 525,65	$ 1.621,49	$ 3.528,05	$ 6.832,20	$ 12.545,24	$ 22.410,01	$ 39.429,89	$ 68.780,62
	$ -102,53	$ 538,95	$ 1.662,53	$ 3.617,37	$ 7.005,16	$ 12.862,83	$ 22.977,32	$ 40.428,06
	$ -476,28	$ -105,13	$ 552,60	$ 1.704,62	$ 3.708,94	$ 7.182,49	$ 13.188,45	$ 23.558,99
		$ -488,34	$ -107,79	$ 566,59	$ 1.747,77	$ 3.802,83	$ 7.364,32	$ 13.522,32
		$ -716,34	$ -500,70	$ -110,52	$ 580,93	$ 1.792,02	$ 3.899,10	$ 7.550,75
			$ -734,47	$ -513,38	$ -113,31	$ 595,64	$ 1.837,38	$ 3.997,81
			$ -873,56	$ -753,07	$ -526,37	$ -116,18	$ 610,71	$ 1.883,90
				$ -895,68	$ -772,13	$ -539,70	$ -119,12	$ 626,17
				$ -980,53	$ -918,35	$ -791,68	$ -553,36	$ -122,14
					$ -1.005,35	$ -941,60	$ -811,72	$ -567,37
					$ -1.057,11	$ -1.030,80	$ -965,44	$ -832,27
						$ -1.083,87	$ -1.056,90	$ -989,88
						$ -1.115,45	$ -1.111,31	$ -1.083,65
							$ -1.143,69	$ -1.139,44
							$ -1.162,95	$ -1.172,64
								$ -1.192,39
								$ -1.204,14

Seguidamente, en el nodo terminal se debe calcular el valor intrínseco de la opción, para luego aplicar las funciones isoelasticas $U(V_{\theta,u,d,m,(t+1)})$, ecuación 38 en cada nodo. Y se estima la utilidad esperada con las probabilidades de transción correspondiente a cada nodo $E\left[U\left(V_{\theta,u,d,m,(t+1)}\right)\right]$, ecuación 39, el equivalente cierto y su valor actual $CE\left(V_{\theta,u,d,m,(t)}\right)$, ecuaciones 40 y 41. Finalmente y de manera recursiva la utilidad correspondiente al equivalente cierto (ecuación 42). En las tablas 4 a 6 se presenta el proceso.

El análisis de sensibilidad expone las variaciones en el valor, en este caso con modificaciones en el sesgo y en la amplitud de los movimientos correspondientes a la rejilla binomial (tabla 7).

Finalmente, se presentan los diferentes valores, a partir del binomial tradicional, transitando por rejillas trinomiales con volatilidad constante, con y sin sesgo, trinomiales con volatilidad cambiante y trinomiales con volatilidad, sesgo y función isoelástica de utilidad (tabla 8).

En la tabla 8 se puede apreciar el efecto del sesgo, ya que su inexistencia hace que la opción de continuar no sea viable, por ende los valores positivos se encuentran en la transferencia, arrojando similares resultados el binomial y tradicional (\$5,44/ U(5,44)) al asignarse un parámetro λ=1. Con sesgo, existe posibilidad de continuar y ello es capturado en el resultado (\$47,35/U(47,35)). Si el parámetro λ > 1, entonces binomial y trinomial no coinciden, arrojando el último un mayor valor dada la distribución en tres nodos (\$56,79 /U(56,79)). Finalmente incorporando volatilidad variable, el resultado se ajusta a la baja producto de los niveles de dispersión menores, quitando peso ponderado a las probabilidades

Tabla 4: Rejilla trinomial desplazada con volatilidad cambiante y funciones isoelásticas pasos 5, 6, 7 y 8

3								4						
5				6				7				8		Decisión
U(.)	PV (CE)	CE	EU(.)	U(.)	PV (CE)	CE	EU(.)	U(.)	PV (CE)	CE	EU(.)	U(.)	$	
30,35	$ 1.576,93	1616,85	$ 30,58	35,55	$ 2.670,65	2738,25	$ 35,82	40,69	$ 35.690,90	36594,42	$ 40,89	45,98	65780,62	comercialización
24,80	$ 804,44	824,81	$ 24,99	30,93	$ 1.678,42	1720,91	$ 31,16	36,06	$ 19.523,11	20017,34	$ 36,25	41,08	37428,06	comercialización
17,17	$ 236,15	242,13	$ 17,30	25,59	$ 892,74	915,34	$ 25,78	31,48	$ 9.887,92	10138,23	$ 31,63	36,44	20558,99	comercialización
9,21	$ 29,65	30,40	$ 9,28	17,91	$ 271,90	278,78	$ 18,05	26,38	$ 4.085,45	4188,87	$ 26,51	31,87	10522,32	comercialización
7,33	$ 13,83	14,18	$ 7,38	8,75	$ 24,99	25,62	$ 8,82	18,90	$ 771,94	791,48	$ 19,00	26,95	4550,75	comercialización
7,16	$ 12,81	13,13	$ 7,22	7,28	$ 13,49	13,83	$ 7,33	8,07	$ 10,93	11,21	$ 8,11	19,90	997,81	comercialización
7,16	$ 12,78	13,10	$ 7,21	7,21	$ 13,10	13,44	$ 7,27	7,27	$ 6,49	6,65	$ 7,30	7,30	6,65	comercialización
7,16	$ 12,78	13,10	$ 7,21	7,21	$ 13,10	13,44	$ 7,27	7,27	$ 6,49	6,65	$ 7,30	7,30	6,65	comercialización
7,16	$ 12,78	13,10	$ 7,21	7,21	$ 13,10	13,44	$ 7,27	7,27	$ 6,49	6,65	$ 7,30	7,30	6,65	transferencia
7,16	$ 12,78	13,10	$ 7,21	7,21	$ 13,10	13,44	$ 7,27	7,27	$ 6,49	6,65	$ 7,30	7,30	6,65	transferencia
7,16	$ 12,78	13,10	$ 7,21	7,21	$ 13,10	13,44	$ 7,27	7,27	$ 6,49	6,65	$ 7,30	7,30	6,65	transferencia
				7,21	$ 13,10	13,44	$ 7,27	7,27	$ 6,49	6,65	$ 7,30	7,30	6,65	transferencia
				7,21	$ 13,10	13,44	$ 7,27	7,27	$ 6,49	6,65	$ 7,30	7,30	6,65	transferencia
								7,27	$ 6,49	6,65	$ 7,30	7,30	6,65	transferencia
								7,27	$ 6,49	6,65	$ 7,30	7,30	6,65	transferencia
												7,30	6,65	transferencia
												7,30	6,65	transferencia

Tabla 5: Rejilla trinomial desplazada con volatilidad cambiante y funciones isoelásticas pasos 1, 2, 3 y 4

1								2							
1				2				3				4			
U(.)	*PV (CE)*	*CE*	*EU(.)*	*U(.)*	*PV (CE)*	*CE*	*EU(.)*	*U(.)*	*PV (CE)*	*CE*	*EU(.)*	*U(.)*	*PV (CE)*	*CE*	*EU(.)*
7,65	$ 12,67	12,99	$ 7,76	9,99	$ 19,78	20,28	$ 10,14	15,79	$ 81,93	84,00	$ 15,97	23,78	$ 207,63	212,88	$ 24,04
6,90	$ 10,67	10,94	$ 7,00	7,55	$ 7,55	7,74	$ 7,74	9,83	$ 27,87	28,58	$ 9,94	16,39	$ 89,11	91,37	$ 16,57
6,75	$ 10,29	10,55	$ 6,85	6,93	$ 6,93	7,11	$ 7,11	7,51	$ 15,12	15,50	$ 7,59	9,61	$ 26,50	27,17	$ 9,72
				6,84	$ 6,84	7,01	$ 7,01	7,05	$ 13,12	13,45	$ 7,13	7,42	$ 14,70	15,07	$ 7,50
				6,83	$ 6,83	7,00	$ 7,00	7,01	$ 12,92	13,24	$ 7,08	7,10	$ 13,32	13,66	$ 7,18
								7,00	$ 12,91	13,23	$ 7,08	7,08	$ 13,23	13,57	$ 7,16
								7,00	$ 12,91	13,23	$ 7,08	7,08	$ 13,23	13,57	$ 7,16
												7,08	$ 13,23	13,57	$ 7,16
												7,08	$ 13,23	13,57	$ 7,16

Tabla 6: Valor del proyecto: Rejilla trinomial desplazada con volatilidad cambiante y funciones isoelásticas

Valor actual			
0			
U(.)	PV (CE)	CE	EU(.)
6,83	$ 10,60	10,87	$ 6,97

Tabla 7: Análisis de sensibilidad, sesgo y amplitud de movimientos

$ 10,60	*0*	*-500*	*-1000*	*-1500*	*-2000*
1	$ 10,01	$ 10,04	$ 10,42	$ 11,27	$ 12,84
1,5	$ 9,99	$ 10,05	$ 10,60	$ 10,83	$ 12,88
2	$ 9,98	$ 10,07	$ 10,75	$ 11,20	$ 11,41
2,5	$ 9,98	$ 10,00	$ 10,36	$ 10,44	$ 13,26
3	$ 9,98	$ 10,06	$ 10,10	$ 11,96	$ 12,51

Tabla 8: Valores según parámetros

Parámetros	*Binomial* σ=k; θ=0; γ=0; λ=1	*Trinomial* σ=k; θ=0; γ=0; λ=1,5	*Trinomial* σ=k; θ=0; γ=0; λ=1,5	*Trinomial* σ=v; θ=-1000; γ=0; λ=1,5	*Trinomial* σ=v; θ=-1000; γ=0; λ=1,5	*Trinomial* σ=v; θ=-1000; γ=v; λ=1,5
θ	0	0	-1000	-1000	-1000	-1000
λ	1	1	1	1,5	1,5	1,5
σ	σ (constante)	σ (constante)	σ (constante)	σ (constante)	σ (variable)	σ (variable)
γ	0	0	0	0	0	γ (variable)
U(.)	5,44	5,44	47,35	56,79	31,96	6,83
PV(CE)	5,44	5,44	47,35	56,79	31,96	10,6

ascendentes ($31,96/U(31,96)). Finalmente, al incorporar aversión al riesgo variable y creciente en el tiempo, el valor se ajusta a la percepción de un sujeto adverso en mercado incompletos, con sesgos y riesgos variables ($6,83/U(10,6)).

Los resultados contenidos en la tabla 8 ponen en evidencia la necesidad de adecuar el modelo a las caracteristicas del proyecto a evaluar y el contexto financiero de referencia. En el caso de proyectos de inversión o emprendimiento tecnológicos, el ciclo de vida producto mercado hace que la volatilidad del emprendimiento sea variable, por ende es condición necesaria aplicar el modelo de volatilidad variable. El mismo razonamiento se aplica para la incorporación de los sesgos en el comportamiento estocástico del subyacente.

Por lo general el valor y los flujos de fondos de las empresas de base tecnológica no se rigen estrictamente por un supuesto de normalidad. El contexto financiero es un factor crucial, pues en mercado perfectos, completos y eficientes todos los riesgos del proyecto son considerados de mercado. Implica que su precio puede replicarse mediante la variabilidad de los flujos de fondos de titulos financieros perfectamente correlacionados con los ingresos y costos del proyecto.

Pero tal ideal es dificil de cumplir, más aún en contexto emergentes. En estos casos un camino está dado por el empleo del enfoque MAD y las funciones isoelasticas de utilidad sensibilizando el coeficiente gamma. Permite replicar riesgos y posiciones frente al riesgo del agente involucrado en la decisión (Smith & Nau, 1995). La necesidad de trabajar con modelos trinomiales esta dada por la mayor especifidad para diagramar el recorrido estocástico (Hull, 2012), y la velocidad para ajustar en el límite al modelo de BS.

4. Conclusiones

Frente al no cumplimiento de los supuestos tradicionales relativos a mercados eficientes, perfectos, completos y desarrollados, es menester capturar y valorar tales imperfecciones en el modelo. El modelo binomal y trinomial tradicional con neutralidad al riesgo, supone inversores racionales ilimitadamente, capaces de construir carteras réplicas para estimar el riesgo de los flujos de fondos del proyecto, en especial para inversiones estables cuya volatilidad se mantenga en determinados rangos. Además se requiere de un contexto caracterizado por mercados financieros perfectos, eficientes y completos, en donde prácticamente todos los riesgos son considerados *de mercado* en los términos de Smith & Nau (1995).

No obstante los mercados emergentes, no completos, y en particular, proyectos del tipo I&D o EBT no ven reflejados sus potenciales riesgos. Es allí donde el modelo debe indagar y brindar herramientas al valuador, que permitan conjugar la ambigüedad del mercado en relación a datos para estimar riesgo, las características dinámicas del inversión en cuestión y las preferencias del inversor. El modelo propuesto toma las rejillas trinomiales como una herramienta que lograr mayor detalle en el mapeo de la granularidad de la rejilla, usa los escenarios y la simulación como técnica para estimar los posibles valores y el sesgo del proyecto abarcando todos los riesgos del mismo e incorpora las funciones isoeláticas de utilidad incorporando el grado de aversión al riesgo del evaluador.

Esto último de vital importancia, pues no debe perderese de vista que un proceso de valuación es una actividad intelectual donde el conocimiento del evaluador se transforma en parámetros sencillos para la toma de decisiones, en especial valor, el cual luego toma forma de precio al perfeccionarse la transacción.

REFERENCIAS

Baliero Filho, R. & Rosenfeld, R. (2004). *Testing option pricing with Edgeworth expansion*. Physica A: Statistical Mechanics and its Application, 344 (3-4): 484-490

Black, F. & Scholes, M. (1972). *The valuation of options contracts and a test of market efficiency*. Journal of Finance, 27 (2): 399-417

Black, F. & Scholes, M. (1973). *The pricing of options and corporate liabilities*. Journal of Political Economy, 81 (3): 637-654

Boyle, P. (1988). *A lattice framework for option pricing with two state variables*. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 23 (1): 1-12

Camara, A. & Chung, S. (2006). *Option pricing for the transformed-binomial class*. Journal of Futures Markets, 26 (8): 759-787

Chance, D. (2007). *A synthesis of binomial option pricing models for lognormally distributed assets*. Working paper SSRN

Chavez, E., Milanesi, G. y Pesce, G. (2019). *Estimación de la aversión al riesgo implícita en los precios de mercado de diferentes activos financieros en el mercado argentino*. Working Paper International Finance Conference.

Copeland, T. & Antikarov, V. (2001). *Real Options*. Texere

Cox, J., Ross, S. & Rubinstein, M. (1979). *Option pricing: A simplified approach*. Journal of Financial Economics, 7 (3): 229-263.

Derman, E., Kani, I. & Chriss, N. (1996). *Implied trinomial trees of the volatility smile*. Goldman-Sachs, Quantitative strategies research notes

Guthrie, G. (2011). *Learning options and binomial trees*. Wilmott Journal, 3 (1): 1-23

Haahtela, T. (2011a). *Displaced diffusion binomial tree for real option valuation*. Working paper SSRN

Haahtela, T. (2011b). *Recombining trinomial tree for real option valuation with changing volatility*. Annual Real Options Conference

Hull, J. (2012). *Options, Futures and other Derivatives*, 8th Ed. Pearson

Jabbour, G., Kramin, M. & Young, S. (2001). *Two-state option pricing: Binomial models revisited*. Journal of Futures Markets, 21 (11): 987-1001

Jarrow, R. & Rudd, A. (1982). *Approximate option valuation for arbitrary stochastic processes*. Journal of Financial Economics, 10 (3), 347-369

Kamrad, B. & Ritchken, P. (1991). *Multinomial approximating models for options with k state variables*. Management Science, 37 (12): 1640-1653

Ljungqvist, L. & Sargent, T. (2000). *Recursive Macroeconomic Theory*. MIT Press

Merton, R. (1992). *Continuous-Time Finance*. Wiley-Blakwell

Milanesi, G. (2012). *Opciones reales: El método binomial, asimetría y curtosis en la valoración de empresas de base tecnológica*. Revista Española de Capital de Riesgo, 2: 41-55

Milanesi, G. (2014a). *Modelo binomial para la valoración de empresas y los efectos de la deuda: Escudo fiscal y liquidación de la firma*. Journal of Economics, Finance and Administrative Science, 19 (36): 2-10

Milanesi, G. (2014b). *Momentos estocásticos de orden superior y la estimación de la volatidad implícita: Aplicación de la expansión de Edgeworth en el modelo de Black-Scholes*. Estudios Gerenciales, 30: 336-342

Milanesi, G. (2018a). *Opciones reales y funciones isoelásticas: El caso de la valuación de un proyecto de I&D en mercados incompletos*. Revista Española de Capital de Riesgo, 2: 39-52

Milanesi, G. (2018b). *Un modelo de opciones reales fuzzy y funciones isoelásticas de utilidad para valorar I&D en mercados incompletos*. Estocástica: Administración y Riesgo, 8 (2): 205-232

Milanesi, G. (2019). *Valuación de opciones reales, transformación de Edgeworth y funciones isoelásticas de utilidad*. Odeon, 16: 123-163

Milanesi, G., Pesce, G. y El Alabi, E. (2014). *Valoración de empresas de base tecnológica: Análisis de riesgo y el modelo binomial desplazado*. Revista Española de Capital de Riesgo, 4: 15-24

Ochoa, C. y Pareja Vasseur, J. (2014). *Valoración de opciones a través de equivalentes a certeza*. Ecos de Economía, 18 (39): 49-72

Pareja Vasseur, J. y Baena, J. (2018). *Estimación del índice de aversión al riesgo utilizando la función CRRA mediante un diseño experimental*. Revista Espacios, 39 (13): 29-47

Pareja Vasseur, J. y Cadavid C. (2016). *Valoración de patentes farmacéuticas a través de opciones reales: Equivalentes de certeza y función de utilidad*. Contaduria y Administración, 61: 794-814

Pratt, J. (1964). *Risk aversion in the small and in the large*. Econometrica, 32 (1-2): 122-136

Rendleman, R. & Bartter, B. (1979). *Two-state option pricing*. Journal of Finance, 34 (5): 1093-1110

Rubinstein, M. (1983). *Displaced diffusion option pricing*. Journal of Finance, 38 (1): 213-217

Rubio Martín, G. y Lamothe Fernández, P. (2010). *Valoración de las grandes corporaciones farmacéuticas a través del análisis de sus principales intangibles, con el método de opciones reales*. Economía Financiera, 21: 47-74

Smith, J. (2005). *Alternative approach for solving real options problems*. Decision Analysis, 2 (2): 89-102

Smith, J. & Nau, R. (1995). *Valuing risky projects: Option pricing theory and decision analysis*. Management Science, 41 (5): 795-816

Suen, R. (2009). Bounding the CRRA Utility Functions. Munich Personal RePec Archive, https://mpra.ub.uni-muenchen.de/13260/1/Bound_CRRA.pdf, 1-16.

Tian, Y. (1993). *A modified lattice approach to option pricing*. Journal of Futures Markets, 13 (5): 563-577

Van der Hoek, J. & Elliot, R. (2006). *Binomial models in finance*. Springer Science

Whaley, R. (2006). *Derivatives: Markets, Valuation and Risk Management*. Wiley

Wilmott, P. (2009). *Frequently Asked Questions in Quantitative Finance*, 2nd Ed. Wiley