



DOCENTES DE ADMINISTRACIÓN FINANCIERA

**XXXV Jornadas Nacionales de Administración Financiera
Septiembre 2015**

UN MODELO DE PREDICCIÓN DE FRACASOS FINANCIEROS CON OPCIONES BARRERA

Gastón S. Milanesi

Hernán P. Vigier

Matías Gzain

Universidad Nacional del Sur

SUMARIO: 1. Introducción; 2. El patrimonio de la empresa como una opción barrera del tipo knock-out; 3. Valoración y determinación de la probabilidad de bancarrota: el modelo BS versus opciones barrera; 4. Conclusiones

Para comentarios: milanesi@uns.edu.ar

1. Introducción

Los modelos financieros permiten recrear de manera simplificada la dinámica e interacción entre un conjunto de variables con el fin de asignar valor, y servir de sostén a la toma de decisiones racionales en la asignación intertemporal de recursos. La determinación del valor correspondiente a un activo es una tarea intelectual que demanda primero conceptualizar y comprender las variables en las cuales se sustenta el valor, cuantificarlas y proyectarlas en el tiempo. La proyección del valor requiere del uso de modelos dinámicos, que de forma absoluta o relativa¹, supongan el proceso estocástico que adopta como comportamiento las variables

¹ Se entiende por valuación absoluta aquella que a partir del estudio y cuantificación de los factores macroeconómicos y microeconómicos vinculados al bien llegan a una conclusión de valor, como ejemplo se puede citar al modelo de descuento de flujos de fondos y la estimación de la tasa de actualización mediante modelos de equilibrio como *Capital Assets Pricing Model (CAPM)*, *Multifactor-Pricing Model (MPM)* o *Arbitrage Pricing Model (APM)*. La valuación relativa consiste en determinar el valor del activo a partir de activos reflejos o gemelos que repliquen los flujos de fondos del bien en

del activo objeto de valuación. En los últimos años han cobrado suma importancia los modelos de valoración de opciones para la valoración de activos financieros como reales. En esta última categoría de activos se encuentran los modelos de valoración de opciones reales que se compone de una rica familia de modelos, cuya principal ventaja, respecto de los modelos tradicionales consiste en la capacidad de replicar con una mayor precisión la complejidad, dinámica y flexibilidad de los proyectos de inversión, estrategias, empresas en marcha, intangibles e innovaciones².

Siguiendo con la línea de ideas desarrolladas en el párrafo anterior, los trabajos seminales de Black y Scholes (1973) y Merton (1974) introducen el concepto de considerar el patrimonio de la firma como una clásica opción de compra europea sobre los activos de la firma. (Black, F-Scholes, M., 1973); (Merton, 1974). Los propietarios tienen la opción de vender los activos de la empresa a los acreedores, pero tiene la opción de conservar su propiedad pagando el precio de ejercicio, es decir el valor nominal de los pasivos más intereses a fecha de ejercicio. No obstante la debilidad que presenta el enfoque reside en que el valor del *call* (patrimonio de la firma) aumenta frente a incrementos en la volatilidad del subyacente (valor de los activos). Por lo tanto aplicando literalmente el modelo si se concibe literalmente al valor del patrimonio como una opción de compra y bajo el supuesto que no existan conflictos de agencia entre propietarios y administradores, los últimos deberían seleccionar proyectos con alta varianza en sus retornos inclusive aquellos que presentan valores actuales negativos, habida cuenta la relación directa entre el valor de un *call* y el riesgo del activo subyacente³.

Conforme se expuso es necesario un modelo que fuerce el precio del patrimonio hacia abajo cuando el riesgo del subyacente es alto. Esto se logra si en lugar de considerar al derecho de propiedad como una clásica opción de compra se lo considera como una opción exótica barrera del tipo *knockout*, asimilable a un *down-and-out call*. En general se conoce como opciones barreras aquellas cuyo valor depende de que el valor del subyacente alcance un nivel o barrera (B) establecida durante la vida del contrato. Por lo general la prima es menor que la típica opción vainilla y se agrupan en dos clases; *knockout option (koo)* y *knock in options (kio)*. Las primeras dejan de existir cuando el subyacente alcanza la barrera mientras que las segundas comienzan su existencia alcanzado dicho nivel⁴.

En el caso del valor del patrimonio de la firma esta tipología de opción se asimila a la situación donde, una vez tomado el préstamo, los propietarios condicionan o ceden los derechos y el flujo generado por los activos de la firma al repago de la deuda, siendo liberados una vez canceladas las obligaciones. Si durante el lapso entre la toma de deuda (inicio del contrato de

cuestión, como ejemplo se puede citar a la Teoría de Pagos Contingentes y los modelos de valoración de opciones contenidos en ella, (Cochrane, 2005)

² Las ventajas de los modelos de opciones reales frente a los clásicos modelos de valoración como el descuento de flujos de fondos, ganancias residuales y múltiples se pueden encontrar en (Dixit, A-Pindyck, R, 1994); (Copeland, T- Antikarov, V, 2001); (Mun, 2004); (Smit, H-Trigeorgis, L, 2004); (Kodukula, P.-Chandra, P., 2006). Una clasificación de los diferentes modelos de opciones reales según sean planteados en términos continuos o discretos, borrosos o probabilísticos se puede encontrar en (Milanesi G. , 2013).

³ Siguiendo esta lógica los administradores deben seleccionar proyectos con varianzas infinitas.

⁴ Las opciones de compra y venta KIO son: a) *down-and-in call and put* (CDI, PDI) que comienza a existir cuando el subyacente está por debajo de B , b) *up and in call and put* (CUI, PUI) comienza a existir cuando la opción supera B . Las opciones de compra y venta KOO son: a) *down-and-out call and put* (CDO, PDO) deja de existir cuando el subyacente alcanza B , b) *up and out call and put* (CUD, PUD) dejan de existir cuando el subyacente supera B . Cabe destacar que cuando el valor de B es mayor o igual que el precio de ejercicio, el valor de CDO es cero y el valor de CUI es c , mientras que CDO y CDI tienen precio indistintamente B sea mayor, menor o igual al precio de ejercicio. Continuando con la misma lógica cuando la barrera es mayor que el precio de ejercicio entonces PDO no tiene valor y PDI asume valor p , mientras que PUI y PUD tienen precio indiferentes a como se pacte la barrera en relación al precio de ejercicio.

opción) y devolución (expiración), el valor de los activos de la firma iguala o es inferior a un nivel definido como cesación de pagos (barrera), se activa la bancarrota. En términos generales dentro del derecho comparado, a esta situación le sigue el pago de la deuda con los activos disponibles a favor de los acreedores y la pérdida de derechos sobre el flujo de fondos de la firma de parte de los propietarios⁵.

El trabajo tiene por objeto exponer el funcionamiento de las opciones exóticas barrera en la valoración del patrimonio para empresas abiertas como cerradas, marcando las debilidades y errores en la valoración extrapolando el clásico modelo de Black-Scholes⁶. El modelo sirve como un instrumento complementario para la valoración y sobre todo para el análisis de la probabilidad de insolvencia antes y a fecha de vencimiento de las obligaciones, siendo un complemento respecto de los modelos estructurales de predicción de fracaso financiero⁷. El trabajo se estructura de la siguiente manera: en la siguiente sección son desarrolladas las ecuaciones para la valoración de opciones exóticas del tipo *knockout-knock in* como la determinación de probabilidad de insolvencias a fecha de vencimiento y antes de la misma. Seguidamente se presenta el funcionamiento del modelo y su comportamiento frente al clásico modelo BS y los resultados obtenidos de sensibilizar volatilidad del subyacente, nivel de la barrera (estado de cesación de pagos) y horizonte temporal. Finalmente se exponen las principales conclusiones.

2. El patrimonio de la empresa como una opción exótica del tipo knockout.

La teoría de valoración de opciones tiene importantes implicancias en materia de valuación de pagos contingentes, y el patrimonio de una empresa no deja de ser uno de ellos. Black y Scholes (1973) fueron los primeros en señalar que el patrimonio de una firma apalancada es

⁵En el derecho concursal argentino la doctrina conceptualiza al estado de cesación de pagos como la imposibilidad en que se halla un empresario en atender regularmente sus obligaciones patrimoniales (Maffia, 1993). Algunos autores, desde el punto de vista jurídico sostienen que no debe confundirse ese estado del patrimonio con el llamado desequilibrio aritmético o déficit de activo en términos absolutos que ocurre cuando el pasivo es mayor que el activo; no obstante desde un sentido estrictamente contable, nunca los pasivos superan a los activos, siempre existe una igualdad matemática. Se ha querido significar es que los precios reales de los activos, no alcanzan para satisfacer las obligaciones asumidas (pasivos), (Rivera, 1996). El sistema estadounidense (Código de Quiebras) cuando define la insolvencia sostiene que se trata de “un estado financiero tal, que la suma de las deudas es mayor al valor de sus propiedades. Quizás, la conceptualización jurídica más cercana a la idea que las finanzas tienen del estado de cesación de pagos sostiene que se trata de un desequilibrio económico que importa un estado patrimonial de imposibilidad de cumplimiento regular de las obligaciones. Es un supuesto dinámico de flujo de fondos insuficientes, para hacer frente al cumplimiento de las obligaciones exigibles, devengando un estado económico de un patrimonio impotente para hacer frente en forma regular a las obligaciones exigibles (Graziabile, 2012); (Trillini, J-Milanesi, G, 2015).

⁶ Si bien no es objeto del presente trabajo, cabe destacar que una de las principales debilidades de los modelos de opciones reales, dada su naturaleza relativa de valuación, consiste en que se requiere de activos financieros gemelos para determinar la varianza del proyecto. En el caso de mercado incompletos, existen diferentes soluciones como el uso de precios de indiferencia, equivalentes ciertos o el enfoque MAD (*marketed asset disclaimer*) (Van der Hoek, J-Elliot, R., 2006)

⁷ Dentro de los modelos de predicción de fracasos se encuentran los modelos estructurales como los modelos Z-score (Altman, 1968) (Altman, 1993) (Altman, E-Kishore, M, 1996) y modelos como el abordado en el trabajo, basados en medidas de mercado y teoría de pagos contingentes (Vasicek, 2001) (Crosbie, P-Bohn J, 2002) (Brockman, P-Turtle, H, 2003) (Hillegeist, S-Keating, E-Cram, D-Lundstedt, K, 2004), (Reiz, A-Perlich C, 2007).

una opción de compra sobre sus activos. A continuación será desarrollada la idea. Las siguientes ecuaciones corresponden al valor de una opción de compra y venta tradicional según el modelo BS:

$$c = V_0 e^{-q(T-t)} N(d_1) - P e^{-r(T-t)} N(d_2) \quad Ec 1$$

$$p = -V_0 e^{-q(T-t)} N(-d_1) + P e^{-r(T-t)} N(-d_2) \quad Ec 2$$

$$d_1 = \frac{\ln(V_0/P) + (r - q + \frac{\sigma_A^2}{2})(T-t)}{\sigma_A \sqrt{(T-t)}} \quad Ec 3$$

$$d_2 = d_1 - \sigma_A \sqrt{(T-t)} \quad Ec 4$$

En este caso V_0 representa el valor del activo al momento de valuación, q la tasa de pago de dividendos o resultados no reinvertidos, P el valor del pasivo de la firma con fecha de vencimiento en T , r el tipo sin riesgo y σ_A la volatilidad de la firma.

Considerar al patrimonio de la una empresa como una opción de compra sobre los activos de una firma apalancada (V_0) implica suponer que la empresa se financia mediante dos fuentes de fondos: capital propio y deuda. Toda la deuda de la firma se asimila a un bono cupón cero con valor nominal P y fecha de vencimiento definida (T). El pago de la deuda se encuentra garantizado por los activos de la firma pero los acreedores no pueden forzar la quiebra de la firma hasta la fecha de vencimiento de la deuda. Si al vencimiento el valor de los activos apalancados de la firma excede el de la deuda, los propietarios ejercen la opción de compra pagando la deuda y reteniendo el excedente. Si al vencimiento el valor de la firma es menos que el de los pasivos, los accionistas caen en incumplimiento no ejerciendo la opción. Al vencimiento la riqueza de los propietarios de la firma es $c = \text{MAX}[0, V - P]$. Aplicando la paridad put-call $V + p = X + c$ y despejando en función de los activos apalancados se tiene $V = (P - p) + c$. El valor de los activos apalancados de la empresa se puede dividir en dos partes: la posición del patrimonio neto (c) y la deuda riesgosa ($X - p$). La posición del patrimonio neto es equivalente a una opción de compra, la deuda riesgosa es equivalente al valor presente de la deuda sin riesgo (X) menos el valor de una opción de venta europea (p). Por lo tanto la riqueza de los acreedores al vencimiento es $X - p = \text{MIN}[V, P]$.

Al vencimiento el valor total de la firma se divide entre propietarios y acreedores, si $V \geq P$ los acreedores reciben en pago el valor de sus acreencias (P) y la opción de venta (p) que poseen sobre la firma expira. Si la firma ingresa en estado de cesación de pagos, se activa la opción de venta ya que se pierde la diferencia entre el valor de la deuda y el valor de mercado de los activos de la firma. Es decir, se tiene el derecho a cobrar (P) pero se pierde ($V - P$), consecuente la posición neta es V el valor de mercado de los activos. El presente razonamiento presenta una fuerte debilidad: el valor de la opción de compra-venta tiene una relación directa con la volatilidad del subyacente. Si se aplica literalmente esta lógica se puede ingresar en conflictos de agencia donde los agentes desechen proyectos rentables a favor de aquellos con mayor riesgo, producto de que el patrimonio de la firma es considerado una opción de compra sobre los activos apalancados, afectando los intereses del principal (propietarios-acreedores).

Es por ello que se necesita un modelo que aplique la lógica de concebir al patrimonio como opción de compra sobre los activos apalancados pero que ajuste el valor de este frente a incrementos en la volatilidad. Para ello se considera el valor del patrimonio neto de la firma a una opción del tipo *knockout, down-and-out call*. Siguiendo a (Brockman, P-Turtle, H, 2003); (Reiz, A-Perlich C, 2007) Una opción de compra tradicional es igual a la suma de *down-and-*

out call y *down-and-in call* (Hull, 2005); (Haug Gaarder, 2007)⁸. Para valores de la barrera iguales a $B \leq P$ es:

$$cdi = V_0 e^{-q(T-t)} (B/V_0)^{2\lambda} N(y) - P e^{-r(T-t)} (B/V_0)^{2\lambda-2} N(y - \sigma_A \sqrt{T-t}) \quad Ec 5$$

$$\lambda = \frac{r-q+\sigma_A^2/2}{\sigma_A^2} \quad Ec 6$$

$$y = \frac{\ln(B^2/V_0 P)}{\sigma_A \sqrt{T-t}} + \lambda \sigma_A \sqrt{T-t} \quad Ec 7$$

El valor del capital de una firma entonces con un nivel de insolvencia por debajo del nivel de pasivos es $cdo = c - cdi$. Si la insolvencia opera en niveles superiores al valor al vencimiento del pasivo, la expresión correspondiente a un *down-and-out call* es:

$$cdo = V_0 e^{-q(T-t)} N(x_1) - P e^{-r(T-t)} N(x_1 - \sigma_A \sqrt{T-t}) - V_0 e^{-q(T-t)} (B/V_0)^{2\lambda} N(y_1) + P e^{-r(T-t)} (B/V_0)^{2\lambda-2} N(y_1 - \sigma_A \sqrt{T-t}) \quad Ec 8$$

$$x_1 = \frac{\ln(V_0/B)}{\sigma_A \sqrt{T-t}} + \lambda \sigma_A \sqrt{T-t} \quad Ec 9$$

$$y_1 = \frac{\ln(B/V_0)}{\sigma_A \sqrt{T-t}} + \lambda \sigma_A \sqrt{T-t} \quad Ec 10$$

Según el modelo BS la probabilidad de insolvencia al vencimiento, según el modelo, está dada por la siguiente ecuación

$$P_{BS}(V_T < P) = 1 - N(d_1 - \sigma_A \sqrt{T-t}) \quad Ec 11$$

En la fecha de vencimiento el precio de ejercicio es igual al valor nominal de los pasivos, en donde el valor del subyacente está por debajo de los pasivos. Esta probabilidad de quiebra al vencimiento es válida en los casos de que la barrera sea superior al precio de ejercicio. Conforme establece Reitz, *et.al.*, considerando al patrimonio como una *cdo*, la probabilidad de que el subyacente asuma valores por debajo de la barrera (t^*) en un instante previo al vencimiento de las obligaciones se determina mediante la siguiente expresión⁹,

$$P(V_{t^* < T} < B) = N \left[\frac{\ln(B/V_0) + (r-q + \frac{\sigma_A^2}{2})(T-t)}{\sigma_A \sqrt{T-t}} \right] + (B/V_0)^{[2(\mu-\delta)/\sigma_A^2]-1} N \left[\frac{\ln(B/V_0) + (r-q + \frac{\sigma_A^2}{2})(T-t)}{\sigma_A \sqrt{T-t}} \right] \quad Ec 12$$

Al vencimiento, para aquellas situaciones en que el activo esté por encima de la barrera pero debajo del ejercicio, la probabilidad de insolvencia es

$$P(B < V_T < P) = N \left[\frac{\ln(V_0/B) + (r-q + \frac{\sigma_A^2}{2})(T-t)}{\sigma_A \sqrt{T-t}} \right] - N \left[\frac{\ln(V_0/P) + (r-q + \frac{\sigma_A^2}{2})(T-t)}{\sigma_A \sqrt{T-t}} \right] - (B/V_0)^{[2(\mu-q)/\sigma_A^2]-1} N \left[\frac{\ln(B/V_0) + (r-q + \frac{\sigma_A^2}{2})(T-t)}{\sigma_A \sqrt{T-t}} \right] - N \left[\frac{\ln(B^2/V_0 P) + (r-q + \frac{\sigma_A^2}{2})(T-t)}{\sigma_A \sqrt{T-t}} \right] \quad Ec 13$$

⁸ Si se suman los perfiles de las opciones barreras de compra del tipo *knockout*, se observa que cuando una expira la otra se activa recíprocamente por lo tanto el resultado es del de un *call* regular.

⁹ La ecuación 11 se aplica para estimar la probabilidad de insolvencia al vencimiento cuando $B \geq P$, ya que en este caso el subyacente estará por debajo de B e inclusive de P .

Consecuentemente la probabilidad total, es decir la probabilidad de insolvencia antes del vencimiento y al vencimiento estará dada por la siguiente expresión que surge de la suma de las ecuaciones 12 y 13.

$$P(\text{total}) = 1 - N \left[\frac{\ln(V_0/P) + (r - q + \frac{\sigma_A^2}{2})(T-t)}{\sigma_A \sqrt{T-t}} \right] + (B/V_0)^{[2(\mu - q)/\sigma_A^2] - 1} N \left[\frac{\ln(B^2/V_0 P) + (r - q + \frac{\sigma_A^2}{2})(T-t)}{\sigma_A \sqrt{T-t}} \right]$$

Ec 14

En la próxima sección se procederá a ilustrar la lógica del modelo y su funcionamiento, comparando los resultados con el clásico modelo BS.

3. Valoración y determinación de la probabilidad de bancarrota: El modelo BS versus Opciones Barrera

En esta sección se presentará el funcionamiento del modelo sobre un caso hipotético. Se supone que el activo¹⁰ de la firma asciende a $V_0 = \$100$; pasivo¹¹ $P = \$80$ con plazo de vencimiento $T = 10$ años; tasa libre de riesgo $r = 5\%$ efectivo anual, volatilidad¹² del activo $\sigma_A = 30\%$ y del patrimonio de la firma $\sigma_E = 72\%$. El ratio de pago q se supone del 3% y la tasa de rendimiento de los activos¹³ μ del 10%.

Con estos datos se puede estimar el valor del patrimonio neto mediante el modelo de Black-Scholes. En este caso d_1 (ecuación 3) arroja un valor de 0,92037; d_2 (ecuación 4) de -0,02830 y sus correspondientes distribuciones normales $N(\cdot)$ son de 0,8213 y 0,4887 respectivamente. Aplicando la ecuación 1 se obtiene un valor del patrimonio neto de \$37,13 es decir \$17,13 por encima del valor contable de la firma. Ahora bien el problema que presenta el modelo reside en el comportamiento que asume al valor del patrimonio ante incrementos en los niveles de volatilidad del subyacente. Esto queda demostrado en la tabla 1 donde se procede a sensibilizar los niveles de volatilidad (columna) y apalancamiento de la firma (fila).¹⁴

En la tabla se puede apreciar que a medida que el endeudamiento crece el precio del patrimonio disminuye, en tanto que ante incrementos en la volatilidad del subyacente el precio crece. Si se procede a sensibilizar la ecuación 1 en función al plazo de tiempo para afrontar las deudas, el comportamiento es el típico de un call, ya que a mayor horizonte de tiempo mayor valor del patrimonio. Siendo $T - t$ el horizonte, en $T - 9 = 1$, $T - 5 = 5$ y $T - 0 = 10$ el valor del patrimonio es de \$23,96; \$33,48 y \$37,13 respectivamente. Los resultados obtenidos indican que el modelo no tiene la suficiente capacidad para capturar la lógica del comportamiento de la firma. En efecto a mayor riesgo no necesariamente conduce a un mayor valor de

¹⁰ El activo de la firma puede estimarse suponiendo que el modelo BS explica el valor de la firma, igualando el valor del *call* al valor intrínseco de la firma o si es una empresa abierta a su capitalización bursátil. En el caso de estimar valores implícitos correspondientes al nivel de endeudamiento, se establecen cotas donde el activo oscila entre un mínimo valor, capitalización bursátil y un máximo equivalente a la capitalización bursátil más dos veces el pasivo (Reiz, A-Perlich C, 2007).

¹¹ El pasivo total de la firma se asimila a un bono cupón cero, expresándose por su valor nominal.

¹² En algunos estudios empíricos la volatilidad del activo se supone entre un rango equivalente al 10% de la volatilidad del patrimonio neto y un máximo de la volatilidad del mismo. En este caso se supone una volatilidad del activo que surge de aplicar la ecuación desapalancamiento sobre la volatilidad del patrimonio neto, a saber, $\sigma_A = \sigma_E / (1 + (B/S)(1 - t))$.

¹³ La tasa de rendimiento de los activos se supone que es el ROA (*return over assets*) obtenido de la información financiera de la firma.

¹⁴ La sensibilidad se realizó con la herramientas tablas del aplicativo Microsoft Excel ®.

la firma e inclusive, si este modelo se aplica literalmente incentivaría agentes a incorporar proyectos solamente analizando su volatilidad en desmedro de los intereses de propietarios y acreedores.

Tabla 1: Relación volatilidad-endeudamiento y valor del patrimonio neto según el modelo BS

σ/P	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
10%	68,0	62,0	55,9	49,8	43,8	37,8	31,9	26,3	21,3	16,8
30%	68,0	62,2	56,9	52,0	47,7	43,8	40,3	37,1	34,3	31,8
60%	69,3	65,9	63,1	60,8	58,7	56,9	55,3	53,8	52,4	51,2
90%	71,5	70,0	68,8	67,8	67,0	66,2	65,5	64,9	64,3	63,7
120%	73,0	72,5	72,1	71,7	71,4	71,1	70,9	70,6	70,4	70,2

A continuación se procede a ilustrar el comportamiento de una opción barrera del tipo *knockout*. Para ello se supone una barrera equivalente al 70% del valor del activo como nivel tolerable para no ingresar en estado de cesación de pago. En este caso al ser la barrera $B < P$ se debe utilizar la ecuación 5 que brinda el valor para un *down-and-in call* (*cdi*) que oficia como ajuste al valor del *call* convencional. Para ello es menester calcular las expresiones de las ecuaciones 6 y 7 arrojando un valor de $\lambda=0,722$; $y=0,1684$; $N(y)=0,6214$. El valor de *cdi* (ecuación 5) es de \$12,046, por lo tanto el valor de $cdo = c - cdi$; es de $\$25,08 = \$37,1 - \$12,04$.

Para valores de $B > P$ se deben aplicar las ecuación 8 previa determinación de los valores correspondientes a las expresiones de las ecuaciones 9 y 10. Estas arrojan un valor de $x_1=1,0611$; $y_1=0,3091$; $N(x_1)=0,8556$; $N(y_1)=0,6214$. La ecuación 8 se divide en dos partes, la primera determina el valor de una opción de compra convencional y la segunda es el ajuste producto de una *cdi*, estimado mediante esta expresión arroja el mismo valor que la ecuación 5.

En la tabla 2 se presenta el comportamiento del modelo frente a diferentes niveles de volatilidad (columna) y barreras (fila)¹⁵.

Tabla 2: Relación volatilidad-barrera y valor del patrimonio neto según opción exótica knockout

σ/B	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
10%	26,3	26,3	26,3	26,4	26,4	26,5	26,0	23,5	16,1	0,0
30%	37,6	39,0	39,4	38,3	35,4	31,0	25,1	17,9	9,6	0,0
60%	58,7	55,8	50,8	44,7	38,1	31,0	23,7	16,0	8,1	0,0
90%	66,5	59,8	52,7	45,4	38,0	30,6	23,0	15,4	7,8	0,0
120%	67,5	60,1	52,6	45,2	37,7	30,2	22,7	15,2	7,6	0,0

La relación valor de la barrera, valor del patrimonio de la firma es inversa, tal cual era de esperar ya que cuanto más cercana la barrera del valor de los activos, menor es el valor del

¹⁵ Para niveles $B \leq P$ se aplicó la ecuación 5 mientras que en el caso de $B > P$ se utilizó la ecuación 8. En ambos casos el valor de *cdi* (*down-and-in call*) es de \$12,04 siendo el ajuste para llegar al *cdo* (*down-and-out call*) al cual se arriba de manera indirecta (ecuación 5) o directamente (ecuación 8).

patrimonio de la firma puesto que existen mayores probabilidades de insolvencia. Con respecto a la volatilidad cabe destacar que, para niveles bajos de barrera, la relación entre patrimonio y volatilidad es directa; no obstante esta relación se invierte cuando el nivel definido como estado de cesación de pagos y quiebra se encuentra cercano al valor de los activos. En el ejemplo, en el intervalo $B \geq \$60$; $B \leq \$100$; la relación valor del patrimonio neto y volatilidad es inversa, sensibilizando dicho intervalo se obtienen los valores correspondientes al patrimonio de la firma que se muestran en la tabla 3.

Tabla 3: Relación volatilidad-barrera y valor del patrimonio neto según opción exótica knockout para el intervalo $B \geq \$60$; $B \leq \$100$

σ/B	60	65	70	75	80
10%	26,5	26,4	26,0	25,2	23,5
30%	31,0	28,2	25,1	21,7	17,9
60%	31,0	27,4	23,7	19,9	16,0
90%	30,6	26,8	23,0	19,2	15,4
120%	30,2	26,5	22,7	19,0	15,2

Para niveles $B > \$65$ se verifica que la volatilidad conspira contra el valor del patrimonio. Esto se puede interpretar argumentando que con valores de activo lindantes con límites de insolvencia, aumentos en la volatilidad a través de inversiones riesgosas en desmedro del valor, ponen en riesgo a la firma no alineándose con los objetivos de los acreedores y propietarios. Para demostrar esta aseveración se procede a sensibilizar el valor de la opción frente a diferentes niveles de subyacente y volatilidad (tabla 4).

Tabla 4: Relación volatilidad-valor del activo según el modelo BS

σ/A	50	70	80	90	100	120
10%	1,45	8,11	13,44	19,62	26,35	40,59
30%	10,44	20,02	25,43	31,16	37,13	49,66
70%	25,71	38,40	44,91	51,50	58,15	71,64
100%	32,23	46,15	53,17	60,22	67,30	81,51

En el modelo BS la volatilidad y el valor del patrimonio presentan una relación directa independientemente del nivel de activos, ya sea que la opción este profundamente o no fuera del dinero/en el dinero. Respecto de la opción barrera los resultados se muestran en la tabla 5.

Tabla 5: Relación volatilidad-barrera y valor del patrimonio neto según opción exótica knockout

σ/A	50	70	80	90	100	120
10%	-66,5	0,5	10,8	18,7	26,0	40,6
30%	-19,2	0,2	8,8	17,1	25,1	40,6
70%	-16,0	0,0	7,9	15,7	23,4	38,7
100%	-15,5	0,0	7,7	15,3	22,9	38,0

En este caso para niveles en el dinero o profundamente en el dinero mayor riesgo conspira contra el valor del patrimonio, siendo el comportamiento congruente con la dinámica y toma de decisiones en los negocios. En efecto, el razonamiento que el segundo momento añade valor producto de la incidencia del valor temporal en el valor total de la opción es un argumento válido para el comportamiento de los activos financieros, en la medida que se cumplan los supuestos del modelo BS¹⁶, no así en el caso de activos reales como el caso de proyecto, empresas en marcha, intangibles etc.

Otro aspecto a ser estudiado es el impacto del horizonte temporal sobre el valor. En el caso de los clásicos modelos de valoración de opciones el factor tiempo presenta una relación positiva con el valor, producto del proceso estocástico del subyacente y de la importante participación del componente valor temporal en la conformación del precio. No obstante en el caso de empresas, el riesgo sobre los activos y consecuentemente la actividad empresarial, no constituye una ventaja si se lo toma como una explicación del valor de la firma. Tal relación directa no se verifica en el caso de las opciones barreras cuando el nivel en el cual se plantea el estado de cesación de pagos es cercano al valor de los activos de la firma, conforme se expone en la tabla 6.

Tabla 6: Relación horizonte temporal-barrera y valor del patrimonio neto según opción exótica knockout

(T-t)/B	10	20	30	40	50	60	70	80	90
(T-t)=1	24,0	24,0	24,0	24,0	24,3	24,5	23,8	20,5	12,9
(T-t)=5	33,5	34,0	34,9	35,4	34,5	31,6	26,7	19,8	10,9
(T-t)=10	37,6	39,0	39,4	38,3	35,4	31,0	25,1	17,9	9,6

En forma consistente con los cuadros precedentes los resultados de la tabla pueden interpretarse en el sentido de que mayor riesgo (volatilidad) no necesariamente aporta más valor, en esa línea de pensamiento mayor horizonte temporal implicaría un mayor riesgo, en particular para aquellos casos donde los niveles de insolvencia establecidos son cercanos al valor de los activos. Por lo tanto el modelo explica con mayor realismo la dinámica del valor del emprendimiento.

A continuación se procederá a estimar las probabilidades de que el valor de los activos de la firma se encuentre debajo de la barrera. La ecuación 11 corresponde a la versión tradicional del modelo, en este caso se determina la probabilidad de que al vencimiento los activos se encuentren en un nivel inferior a los pasivos de la firma.

En el ejemplo el valor de los activos asciende a \$100, pasivos \$80 y la volatilidad es del 30%; consecuentemente la probabilidad de insolvencia en un horizonte Tes de $P_{BS}(V_T < P) = 1 - N(0,9203 - 0,3\sqrt{10} - 0) = 98,75\%$. El importante valor obedece a que el precio de ejercicio (pasivos) es cercano al valor del activo a fecha de vencimiento.

La probabilidad de insolvencia decrece a medida que el horizonte temporal se ajusta a la fecha de expiración además de presente una relación inversa con los niveles de endeudamiento (precio de ejercicio), típico del comportamiento de las opciones. En cuanto al comportamiento de la volatilidad y la probabilidad de insolvencia se puede apreciar que no existen

¹⁶ En la medida que los supuestos del modelo se cumplan, ya que a menudo el precio de opciones sobre activos financieros muy fuera del dinero, como de activos reales (nuevos proyectos, intangibles, innovaciones de mercado) es explicado mayoritariamente por momentos estocásticos de orden superior (asimetría – curtosis) (Milanesi G. , 2014).

Tabla 7: Relación horizonte temporal-endeudamiento y probabilidad de insolvencia según opción convencional

(T-t)P	20	40	60	80	100
(T-t)=10	78,2%	93,5%	97,4%	98,8%	99,3%
(T-t)=5	25,9%	65,0%	83,9%	92,2%	96,0%
(T-t)=1	0,0%	1,2%	17,9%	51,6%	78,3%

Tabla 8: Relación volatilidad-endeudamiento y probabilidad de insolvencia según opción convencional

σ/P	20	40	60	80	100
10%	0,3%	29,9%	77,5%	95,2%	99,1%
30%	78,2%	93,5%	97,4%	98,8%	99,3%
70%	89,2%	94,0%	95,9%	96,9%	97,5%

marcadas diferencias entre distintos precios de ejercicio y niveles de volatilidad. Inclusive para ejercicios cercanos al valor del subyacente a mayor riesgo la probabilidad de insolvencia decrece. En función a estos resultados, queda claro que el modelo no predice de acuerdo a la realidad de los negocios, ya que las probabilidades ceden frente a niveles importantes de volatilidad, es decir, un incremento en el riesgo del negocio.

En el caso de establecer un nivel de insolvencia se pueden estimar las probabilidades de: a) en algún instante previo al vencimiento (t^*) el valor de los activos se encuentre por debajo del nivel de la barrera (ecuación 12); b) la probabilidad de que al vencimiento (T) el valor de los activos se encuentre encima de la barrera pero debajo del valor de los pasivos (ecuación 13)¹⁷. Para el caso estudiado el valor de $P(V_{t^*} < T < B)$ asciende a 47,55% y el valor al vencimiento es de $P(B < V_T < P)$ es del 63,71%. Conforme se puede apreciar el modelo brinda mayor información ya que definido el nivel por el cual se presume la insolvencia, este indica la probabilidad de que los activos antes del vencimiento asuman valores inferiores a la barrera (ecuación 12) y la probabilidad de que al vencimiento se ingrese en estado de falencia, sin perjuicio de que el valor de los activos sea superior a la barrera establecida (ecuación 13).

La probabilidad total de insolvencia surge de aplicar la ecuación 14, esta es la suma de caer en insolvencia al vencimiento (primer término) y la probabilidad de caer en insolvencia en cualquier momento antes del vencimiento (ecuación 12) expresada en el segundo término. En el ejemplo $P(\text{total}) = 32,81\% + 30,89\% = 63,71\%$, para analizar el comportamiento con diferentes niveles de barrera, volatilidad y plazo para el pago de las obligaciones.

Tabla 9: Relación horizonte temporal-endeudamiento y probabilidad de insolvencia según opción exótica del tipo knockout

P(total)	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	120
(T-t)=1	20,4%	20,4%	20,4%	20,4%	20,4%	20,8%	25,4%	42,9%	72,2%	100,0%	128,8%
(T-t)=5	30,2%	30,2%	30,2%	31,0%	34,3%	42,1%	54,2%	69,2%	85,0%	100,0%	124,9%
(T-t)=10	30,9%	31,0%	32,0%	35,5%	42,3%	52,1%	63,7%	76,1%	88,3%	100,0%	120,7%

¹⁷ Cabe destacar que para el caso de que $B > P$ la ecuación no tiene sentido de ser aplicado puesto que la firma no ingresa en insolvencia si los activos se encuentre por encima del nivel de barrera.

Tabla 10: Relación horizonte temporal-endeudamiento y probabilidad de insolvencia según opción exótica del tipo knockout

P(total)	10	20	30	40	50	60	70	80
10%	0,3%	0,3%	0,3%	0,3%	0,3%	0,3%	1,0%	5,3%
30%	30,9%	31,0%	32,0%	35,5%	42,3%	52,1%	63,7%	76,1%
70%	76,9%	80,5%	84,4%	87,9%	90,9%	93,5%	95,6%	97,3%

El modelo captura la lógica en el comportamiento de las empresas, a diferencia de un activo financiero, ya que ajusta valores frente a significativos niveles de volatilidad. En este caso la probabilidad de insolvencia en función del tiempo y nivel de la barrera asume un comportamiento suavizado. La tabla 10 expone el resultado del modelo frente a niveles de volatilidad; donde aumentos en la volatilidad generan incrementos en las probabilidades de insolvencia.

Para niveles cercanos al valor de los activos el modelo genera los siguientes resultados: [B; \$80; ($\sigma = 10\%$; 30%; 70%)] P(total) = 5,3%; 76,10%; 97; 3% a diferencia del modelo tradicional [P; \$80; ($\sigma = 10\%$; 30%; 70%)] P(total) = 95,2%; 98,8%; 96; 9%. En este último caso se aprecia como la volatilidad del subyacente empuja el valor para arriba y disminuye los niveles de probabilidad de que los activos estén por debajo de los pasivos.

4. Conclusiones

Los modelos son simplificaciones de una compleja realidad constituyendo una vital herramienta de fundamentación de la toma de decisiones. La lógica de considerar el patrimonio como una opción de compra sobre los activos de una firma, presenta la ventaja de incorporar el concepto de flexibilidad y dinamismo propio del devenir de los negocios. No obstante, el no conocimiento de las limitaciones del modelo con llevan a erróneas conclusiones relativos al valor del capital de la firma. Desde la perspectiva de la valoración relativa, el patrimonio de la firma se asemeja a una opción de compra que los propietarios tienen sobre los activos de la empresa (opción de venta en el caso de los acreedores). Una de las características del modelo BS considera el valor de la opción directamente proporcional a la volatilidad del subyacente. Extrapolar dicho concepto a la lógica de valoración de la firma y toma de decisiones por los agentes (directivos), conduciría a situaciones de conflictos con los principales (propietarios y acreedores de la firma), ya que por la vía del absurdo la conclusión sería privilegiar inversiones en proyectos de mayor volatilidad, pasando la rentabilidad a un segundo plano.

En una firma las dosis incrementales de volatilidad, en cierto punto, atentan contra el valor del capital propio producto del apalancamiento financiero. Esta situación impone la necesidad de buscar un modelo que replique con mayor fidelidad la conducta indicada. Para ello se propuso el uso de opciones barrera como instrumento de valoración relativa del patrimonio de la firma del tipo *down-and-out call (cdo)*. Una de las principales ventajas del modelo consiste en asumir que la quiebra no se genera solamente si el nivel de activos es insuficiente en relación a los pasivos, también si los activos no superan determinado nivel (*B*) el cual por lo general es inferior al valor de los pasivos, sin perjuicio que algunas situaciones puede imponerse por encima del valor nominal de estos. Esta barrera es el nivel mínimo de valor de los activos para que la opción de los propietarios no expire antes del vencimiento de las obligaciones. Los principales resultados obtenidos fueron:

- a) Relación volatilidad y nivel de la barrera: relación directa entre volatilidad, B y valor del capital, salvo en niveles donde la barrera es cercana al valor nominal de los pasivos. Cuando la barrera es cercana o superior al valor del pasivo, la relación valor y niveles de volatilidad es inversa. Esta aseveración queda corroborada cuando se sensibilizan diferentes valores del subyacente y volatilidad; con la excepción de que los activos se encuentren muy por debajo de la barrera, en otro caso la relación entre valor del patrimonio y nivel de riesgo se mantiene inversa.
- b) Relación horizonte temporal nivel de la barrera: relación inversa entre el plazo y el valor del patrimonio neto, igual que en el modelo BS, salvo en los casos de B cercanas al valor del pasivo. En estos casos a mayor plazo menor valor del patrimonio producto del efecto incertidumbre (volatilidad) indicada precedentemente, siendo el término $\sigma_A \sqrt{T - t}$ mayor.
- c) Relaciones volatilidad, nivel de la barrera y probabilidades de bancarrota: Existe una relación directa entre la volatilidad, nivel de la barrera y probabilidades totales de bancarrota. Este comportamiento es consistente con a); ya que niveles significativos de volatilidad donde la barrera es cercana al valor de los pasivos se ajusta a la baja el patrimonio neto.
- d) Relación horizonte temporal, nivel de la barrera y probabilidades de quiebra: para la probabilidad de quiebra total (ecuación 14) y antes del vencimiento (ecuación 12), en tanto el subyacente supere el valor de la barrera y de los pasivos, a menor tiempo menor probabilidad de bancarrota, comportamiento congruente con los resultados obtenidos en a).

Por lo expuesto considerar el capital de una firma como una opción de compra sobre los activos requiere no solamente extrapolar el clásico modelo BS, también definir niveles donde la empresa potencialmente ingrese en estados de cesación de pago. Para ello es menester una herramienta que se ajuste a la lógica de los negocios, donde el valor no emerge solamente de incrementos en la varianza y distancia en los horizontes temporales. Debe introducirse elementos que ajusten a la baja cuando el valor de los activos se encuentra por debajo de determinado nivel, en este caso esto se logra utilizando en valoraciones relativas opciones exóticas del tipo *knockout*, de la forma *down-and-out call*.

REFERENCIAS

- Altman, E. (1968). Financial ratios, discriminant analysis and the prediction of corporate bankruptcy. *Journal of Finance*, 4, 589-609.
- Altman, E. (1993). *Corporate Financial Distress and Bankruptcy*, 2nd Ed. New York, United State: Wiley Finance.
- Altman, E-Kishore, M. (1996). Almost everything you wanted to know about recoveries on default bonds. *Financial Analyst Journal* (52), 57-64.
- Black, F-Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economics* (81), 637-659.
- Brockman, P-Turtle, H. (2003). A Barrier Option Framework for Corporate Security Valuation. *Journal of Financial Economics*, 67, 511-529.
- Cochrane, J. (2005). *Asset Pricing*, 2nd Ed. Princeton: Princeton University Press.
- Copeland, T- Antikarov, V. (2001). *Real Options*. New York: Texere LLC.

- Crosbie, P-Bohn J. (2002). *Modeling default risk*. San Francisco, United State: KMV Corporation.
- Dixit, A- Pindyck, R. (1994). *Investment under Uncertainty*. New Jersey: Priceton University Press.
- Graziabile, D. (2012). *Derecho Concursal*. CABA, Argentina: Abeledo Perrot.
- Haug Gaarder, E. (2007). *Derivatives: Models on Models*. Chichester : John Wiley & Sons.
- Hillegeist, S-Keating, E-Cram, D-Lundstedt, K. (2004). Assessing the probability of bankruptcy. *Review of Accounting Studies* (9), 5-34.
- Hull, J. (2005). *Futures, Options and other Derivatives*, 5th Ed. New Jersey: Prentice Hall.
- Kodukula, P.-Chandra, P. (2006). *Project Valuation using Real Options: A practitioner's guide*. USA: J Ross Publishing.
- Maffia, O. (1993). *Derecho Concursal*. CABA, Argentina: De Palma.
- Merton, R. (1974). On the pricing of corporate debt: the risk structure of interest rates. *Journal of Finance*, 29, 449-470.
- Milanesi, G. (2014). Momentos estocásticos de orden superior y la estimación de la volatilidad implícita: aplicación de la expansión de Edgeworth en el modelo de Black-Scholes. *Estudios Gerenciales* (30), 336-342.
- Milanesi, G. (2013). *Teoría de Opciones: Modelos específicos y aplicaciones para valorar estrategias, activos reales e instrumentos financieros*. Bahía Blanca: Editorial de la Universidad Nacional del Sur. REUN.
- Mun, J. (2004). *Real Options Analysis: Tools and Techniques for Valuing Strategic Investment and Decisions*. New York: Wiley.
- Reiz, A-Perlich C. (2007). A Market-Based Framework of Bankruptcy Prediction. *Journal of Financial Stability*, 3 (2), 85-131.
- Rivera, J. (1996). *Instituciones del Derecho Concursal*. CABA, Argentina: Rubinzal Cunsoli.
- Smit, H-Trigeorgis, L. (2004). *Strategic Investment: Real Options and Games*. New Jersey, Estados Unidos: Princeton University Press.
- Trillini, J-Milanesi, G. (2015). La cesación de pagos en los procesos judiciales: Una mirada jurídica a la luz de las finanzas corporativas. *Doctrina Societaria y Concursal*, XXVII, 21-30.
- Van der Hoek, J-Elliot, R. (2006). *Binomial models in Finance*. New York, United State: Springer Science.
- Vasicek, O. (2001). *EDF credit measure and corporate bond pricing*. San Francisco, United State: KMV corporation.