MÉTODOS BINOMIAL, TRINOMIAL Y DE DERIVADAS PARCIALES EN LA VALUACIÓN DE DERIVADOS DEPENDIENTES DEL CAMINO

Carlos E. Neuman
Mónica Zanor

Universidad Nacional del Litoral

SUMARIO: 1.Derivados exóticos. Opciones vanilla y lookback; 2. In memoriam L.A.Santaló.

Para comentarios: ceneuman@fiqus.unl.edu.ar

I. DERIVADOS EXÓTICOS. OPCIONES VANILLA Y LOOKBACK

Introducción. Los activos subyacentes de una opción pueden incluir: acciones, índices de acciones, commodities, divisas extranjeras, instrumentos de deudas o contratos futuros.

Existen dos tipos de opciones: *CALL y PUT*: Una opción *call* da al poseedor el derecho de comprar el activo subyacente hasta cierta fecha, a un cierto precio. Una opción *put* da al poseedor el derecho de vender el activo subyacente hasta cierta fecha, a un cierto precio.

El precio en el contrato se conoce como precio de ejercicio *(exercise price o strike price)*, la fecha en el contrato es conocida como fecha de expiración (*maturity*).

Las opciones americanas pueden ser ejercitadas en cualquier momento antes de la fecha de expiración, mientras que las opciones europeas solo pueden ejercitarse en la fecha de vencimiento.

La mayoría de las opciones que se negocian en los mercados son americanas y usualmente cada contrato es un acuerdo para comprar o vender cien acciones.

Las opciones se pueden clasificar en tradicionales o vanilla y exóticas. Las opciones exóticas son variaciones de las tradicionales.

Ejemplos de éstas últimas son: asiáticas, binarias, de barrera, compuestas, lookback, etc. Una de las diferencias sobresalientes es que las vanilla se emiten sin pensar en la necesidad del comprador; las exóticas, en cambio, se realizan *over the counter*, es decir las partes interesadas arman una opción a su medida.

Este trabajo ha sido parcialmente sostenido por la Universidad Nacional del Litoral, subsidio 12-H168

Posiciones. Existen dos partes en todo contrato de opciones. Una parte es quién tiene *long position* (posición larga; i.e. quién compra la opción). Por otro lado está quién posee una *short position* (posición corta; i.e. quién vende o emite la opción).

Valuación usando árboles binomiales. Los árboles binomiales tratan la valuación de opciones europeas y americanas, pero son modelos muy imprecisos.

Un modelo más realista es uno que supone que los movimientos en los precios de las acciones están compuestos por gran cantidad de pequeños movimientos binomiales.

Consideremos la evaluación de una opción cuyas acciones no pagan dividendos. Comenzamos dividiendo la vida de la opción en pequeños intervalos de tiempo de longitud *dt*. Suponemos que en cada intervalo de tiempo el precio de la acción se mueva desde su valor inicial S_0 a uno de sus nuevos valores $S_0 u$ y $S_0 d$. En general, $u < 1$ y $d < 1$.

El movimiento desde S_0 a $S_0 u$, representa un aumento y el movimiento desde S_0 a $S_0 d$, marca una caída en el precio.

La probabilidad de una *suba* es *p* y la de una *baja* es *1-p.*

Determinación de p, u y d. Los parámetros *p, u* y *d* deben dar el valor correcto para la media y la varianza del precio de la acción durante un intervalo de tiempo *dt*.

El retorno esperado de una acción es la tasa libre de riesgo, r. Así, el valor esperado del precio de una acción al final del intervalo *dt* es Se^{rdt}, donde *S* es el precio de la acción al comienzo del intervalo de tiempo. Se sigue que:

$$\mathrm{Se}^{\mathrm{r}\delta\mathrm{t}} = \mathrm{pSu} + (1-\mathrm{p})\mathrm{Sd} \tag{1}$$

o

$$\mathrm{e}^{\mathrm{r}\delta\mathrm{t}} = \mathrm{pu} + (1-\mathrm{p})\mathrm{d} \tag{2}$$

La desviación estándar del cambio en el precio de una acción en un pequeño intervalo de tiempo *dt* es $s\sqrt{dt}$. La varianza de este cambio es $s^2 dt$.

Usando la definición de varianza, obtenemos:

$$\sigma^2\ \mathrm{dt} = \mathrm{pu}^2 + (1-\mathrm{p})\mathrm{d}^2 - [\mathrm{pu} + (1-\mathrm{p})\mathrm{d}]^2$$

Las ecuaciones (1) y (2) imponen dos condiciones para *p, u* y *d*. Una tercera condición usada es:

$$u = \frac{1}{d} \tag{3}$$

Probado para *dt* pequeño, las tres condiciones implican:

$$p = \frac{a-d}{u-d} \tag{4}$$

$$u = e^{s\sqrt{dt}} \tag{5}$$

$$d = e^{-s\sqrt{dt}} \tag{6}$$

donde $$a = e^{rdt} \tag{7}$$

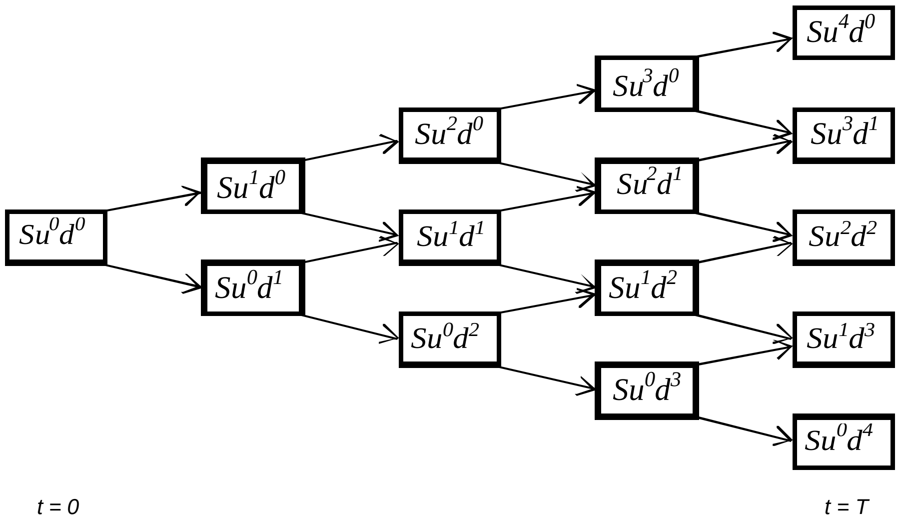
Árbol de precios de acciones. En el tiempo cero el precio S_0, es conocido. En el tiempo *dt*, existen dos posibilidades para el precio de la acción, S_0u y S_0d ; en el tiempo *2 dt*, existen tres posibilidades S_0u^2, S_0 y S_0d^2, y así sucesivamente.

En general, en el tiempo *i dt*, (i+1) precios de la acción son considerados. Estos son:

$$S_0 u^j d^{i-j} \qquad \text{(j=0,1,…, i)}$$

(Notar que la relación (3) es usada en el cálculo del precio de la acción en cada nodo del árbol.)

Esquemáticamente:



El parámetro Delta. El delta de una opción de acciones es la razón entre el cambio en el precio de la opción y el cambio en el precio de la acción subyacente.

El delta de un call es positivo mientras que el delta de un put es negativo.

Como el delta cambia durante la vida de la opción, para mantener nuestra inversión segura, sin riesgo usando opciones y acciones (a las que se refiere la opción) necesitamos hacer ajustes en nuestro portfolio periódicamente. El ajuste a realizar se conoce como rebalanceo, y es una forma de realizar hedging (procedimiento para proteger la inversión). En este ejemplo se hace quincenalmente.

Si el precio de la acción nunca alcanza el precio de ejercicio X, la realización de hedging no cuesta nada. En cambio, si el camino de la acción supera el precio de ejercicio muchas veces, el esquema de hedging es muy costoso.

Tomar una posición en la opción es la misma tarea que realizar hedging en la posición opuesta en la opción. Si el delta en short position es –? , en long position es + ?, así la inversión global tiene ? nulo, que se conoce como delta neutral.

Debido al cambio, la posición del inversor permanece con delta neutral solo para un periodo corto de tiempo.

Para una posición sin riesgo, por ejemplo, se debe comprar ? acciones por cada opción vendida. Esto significa cambiar la cantidad de acciones subyacentes en nuestro portfolio.

Características del Rebalanceo. La ejercitación debe realizarse si el delta se aproxima a 1, pero no debe ejercitarse si el delta se acerca a cero.

Se supone que la volatilidad es constante y que no hay costos de transacción, y se arma el siguiente cuadro:

quincena	Precio acción	delta	Acciones compradas	Costo acciones compradas	Costo acumulado con interés	Costo interés
0	p_0	Δ_0	$A_0\,\Delta_0$	$(A_0\,\Delta_0)p_0$	$(A_0\,\Delta_0)p_0$	$(A_0\,\Delta_0)r_q$
1	p_1	Δ_1	A_1	$A_1\,p_1$	B_1	$[A_0\,\Delta_0\,(p_0+r_q)+A_1p_1)]$
…	…	…	…	…	…	…
i		Δ_i		$(A_i\Delta_i)p_i$	B_i	$B_i\ r_q$
$i+1$				$(A_{i+1}\Delta_{i+1})p_{i+1}$	B_{i+1}	$B_{i+1}\ r_q$
…	…	…	…	…	…	…
T	p_T	Δ_T	A_T	$(A_T\Delta_T)p_T$	B_T	------

donde

$$\boxed{A_i = A_0\,\Delta_i \pm \sum_{j=0}^{i-1} A_j\ ; \quad \text{para } i = 1,\ldots,T}$$

$$\boxed{B_{i+1} = B_i + (B_i * rq) + (A_{i+1} * \Delta_{i+1}) * p_{i+1}; \quad \text{para } i = 1,\ldots,T}$$

- r_q es la tasa quincenal
- En la columna de cantidad de acciones compradas, el signo depende de si fueron compradas, las resto; y si fueron vendidas, las sumo.
- A_0=10000
- $B_1 = A_0\,\Delta_0\,(p_0 + r_q) + A_1\,p_1$

Las opciones *lookback* ('mirar hacia atrás') son aquellas cuyo precio de ejercicio es la máxima cotización (mínima para la opción de compra) alcanzada por el precio de la acción hasta el momento.

En primer término se procede utilizando métodos de árboles binomiales y, luego se complementan con métodos de simulación y trabajo hacia atrás en el árbol binomial (*backwards*) con la finalidad de valuar las opciones del tipo *lookback*. En el momento de la expiración se observa retrospectivamente (look back). El método antes mencionado parte de la división de la vida útil de la opción en *n* períodos y se realizan repetidas simulaciones sobre el árbol, comparando los valores obtenidos para el pago por el ejercicio temprano (*payoff*) con los VP esperados (no ejercicio); la simulación avanza en forma recursiva hasta que se logra determinar la estrategia óptima y por consiguiente valuar ésta opción exótica.

Las distintas cotizaciones que alcanza la acción subyacente cada quincena determinan un vector de precios al que llamamos trayectoria o camino. (En un árbol binomial son fáciles de visualizar).

En este trabajo se realizaron todas las posibilidades de camino para cada nodo y se eligió el máximo, pues se quiere ver la mayor ganancia.

Procedimiento. Se trabaja con un portfolio de 100 opciones de venta (americanas):
Vanilla o tradicionales
Exóticas: Lookback

Cada opción cuenta con 100 acciones. Se considera la evaluación de opciones cuyas acciones no pagan dividendos.

Cálculos en los nodos. Trabajo hacia atrás

- Tradicionales: El valor de la opción en el Nodo (T, j) se obtiene tomando:
  $máx\ \{ X - S_0 u^{T-j} d^{j},\ 0\}$

El valor de la opción en los nodos (i, j), $0 \leq i \leq T-1$, $0 \leq j \leq T-1$, es el máximo entre:

1. $e^{-rdt}\left[p.f_{i+1,j} + (1-p).f_{i+1,j+1}\right]$
2. $X - S_0 u^{i-j} d^{j}$ (el pago del ejercicio temprano)

- Exóticas: El valor de la opción en el nodo (T, j) se obtiene tomando:
  $máx\{\ 0\ ;\ \underset{0\leq t\leq T}{máx} S_t - S_T\ \}$

Observación: Este valor depende del camino que siga el precio de la acción. Aquí se toma en cuenta el 'mejor' camino; es decir, el valor máximo de todas las trayectorias que pueda seguir la acción.

Para valuar la opción antes del tiempo T, se calcula el máximo entre:

1. $e^{-rdt}(pf_{i+1,j} + (1-p) f_{i+1,j+1})$
2. $\underset{0\leq t\leq T}{máx} S_t - S_T$ (el pago del ejercicio temprano)

Referencias. Los datos con los que se trabajó pertenecen a opciones tradicionales:

S₀ = 1.45
*X =1.52**
r = 0.0503 anual
s=0.6945
T= 0.1644

* El precio de ejercicio, como ya se ha definido, no es el mismo para opciones lookback que para opciones tradicionales.

(obtenidos del diario El cronista comercial, 24 de mayo de 2000)

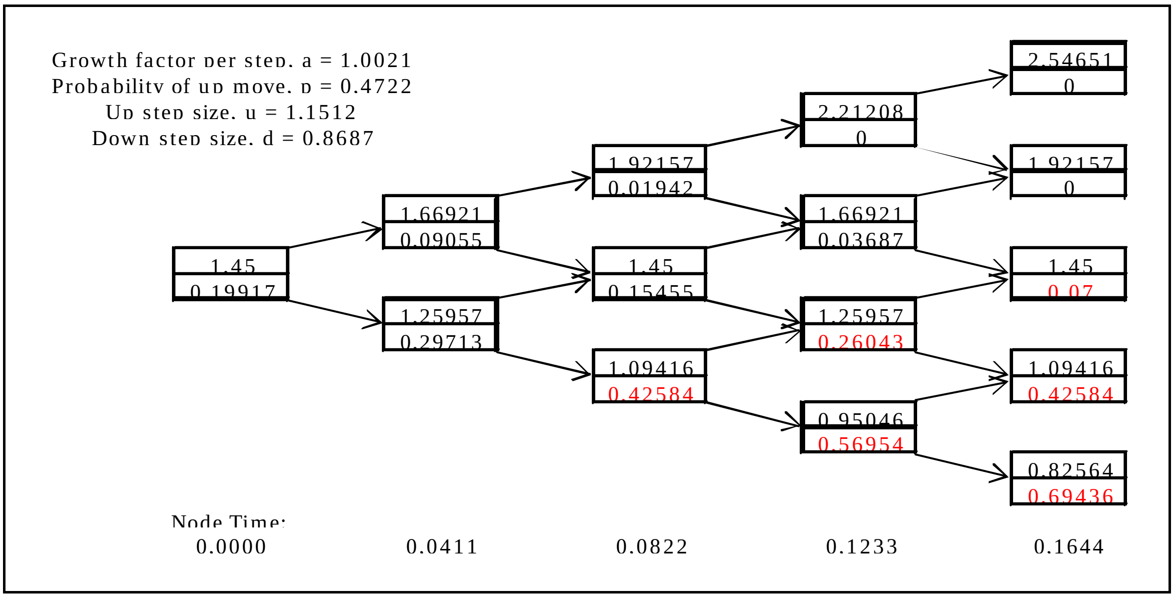
1. Se usa tasa de interés sin riesgo.
2. Las acciones no pagan dividendos.
3. Uso de '*backwards induction*' (trabajo hacia atrás) en el árbol binomial.

Como se utilizan opciones americanas es necesario chequear en cada nodo si se ejercita antes del vencimiento o es mejor esperar otro período ?t.

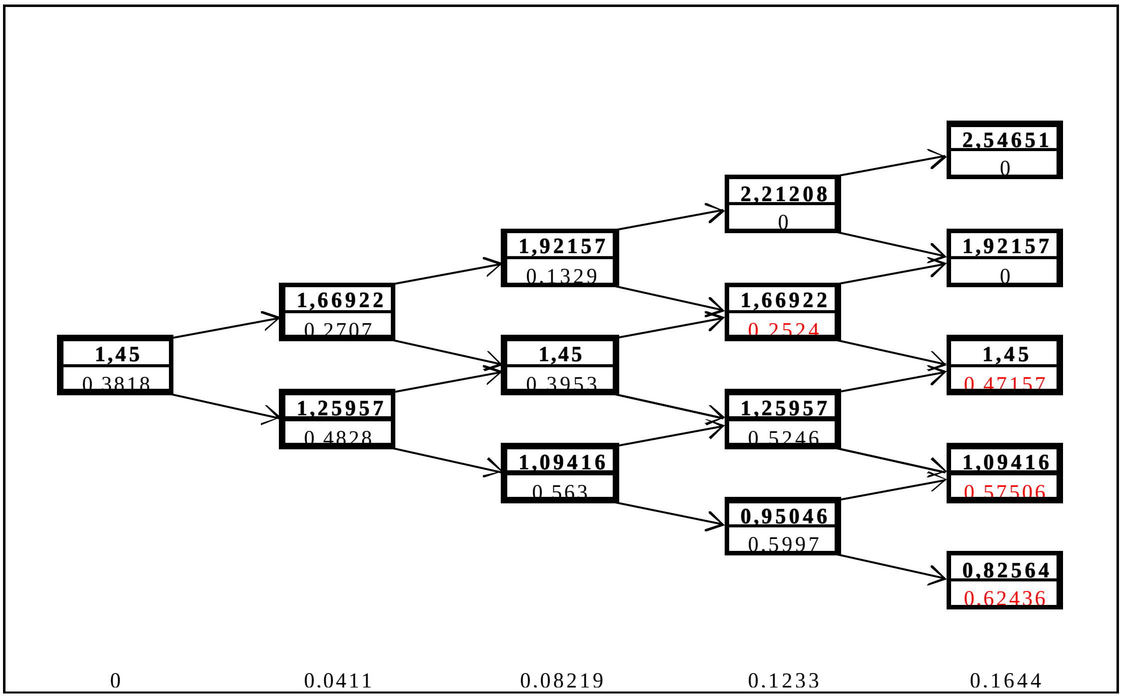
Se trabajó con 3 posibilidades, que se compararon con los datos obtenidos de las mismas trayectorias en opciones tradicionales.

La vida útil de la opción es de dos meses.

Árboles Binomiales. Para las opciones tradicionales



Para las Lookback el árbol binomial queda conformado con los siguientes valores:

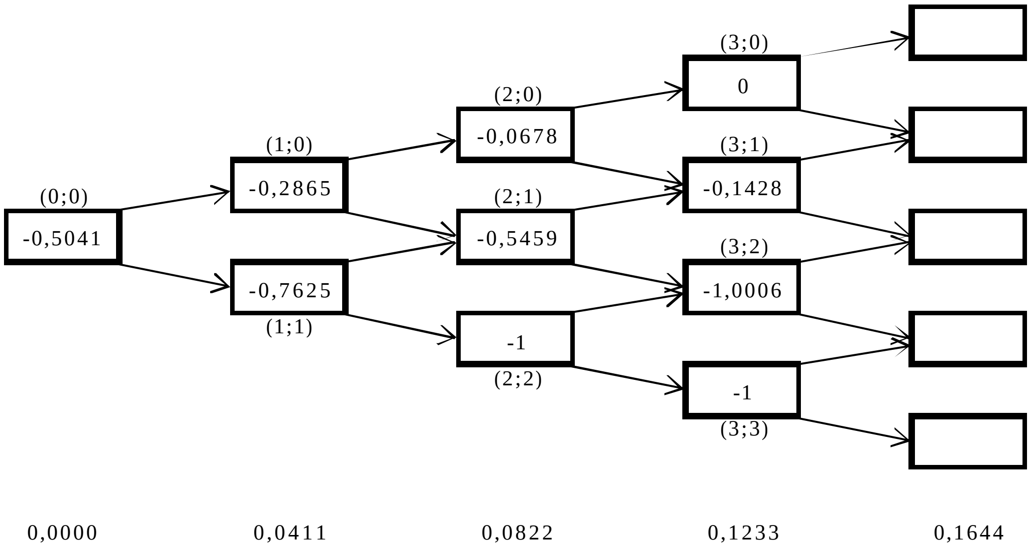


Cálculo del delta

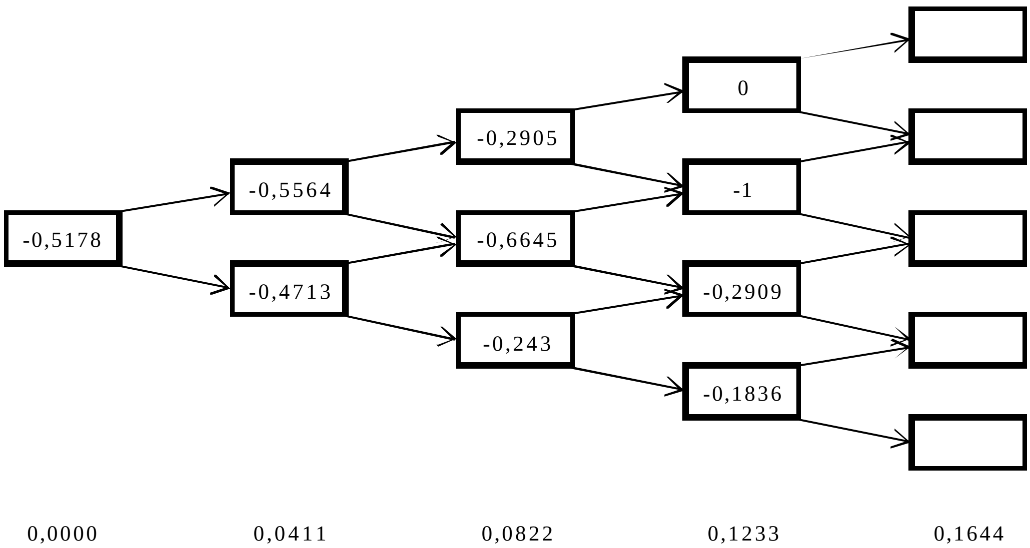
$$\Delta_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i+1,j+1}}{S_{i+1,j} - S_{i+1,j+1}}$$

para i, j =0, 1, 2, 3.

Tradicionales:

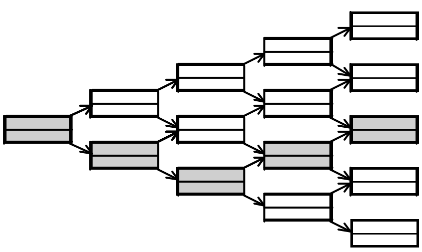


Lookback:



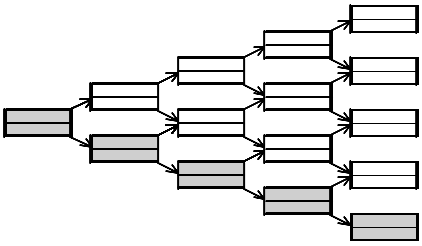
Comparación de ganancias

Posibilidad 1



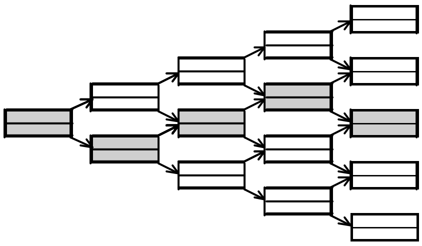
	Tradicionales	lookback
T = 4	**1925,18**	**898,14***

Posibilidad 2



	Tradicionales	lookback
T = 4	**1924,05**	**3814,01**
T = 3	**1951,83**	**2802,52**

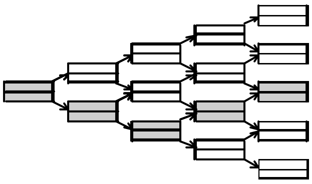
Posibilidad 3



	Tradicionales	lookback
T = 4	**2000,88**	**1246,76***

(*) No se está en una posición in the money, que es la conveniente para ejecutar y se produce para una opción de venta cuando S=K

Posibilidad 1



Tradicionales

quincena	precio acción	delta	acciones compradas	costo	costo+interés	interés
0	1,45	0,5041	5041	7309,45	7309,45	15,35
1	1,2596	0,7625	2584	3254,81	10579,61	22,22
2	1,0942	1	2375	2598,73	13200,55	27,72
3	1,2596	1,0006	6	7,56	13235,83	27,80
4	1,45	1	6	8,70	13254,92	

costo hedging	13254,92
costo opciones	19,90
venta acciones	15200,00
ganancia	1925,18

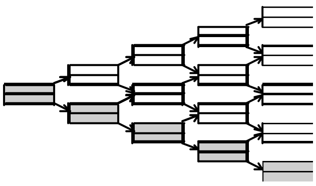
Lookback

quincena	precio acción	delta	Acciones compradas	costo	costo+interés	interés
0	1,45	0,5178	5178	7508,10	7508,1	15,77
1	1,2596	0,4713	465	585,71	6938,15	14,57
2	1,0942	0,243	2283	2498,06	4454,66	9,35
3	1,2596	0,2909	479	603,35	5067,37	10,64
4	1,45	1	7091	10281,95	15359,96	

En t = 4	
costo hedging	15359,96
costo opciones	38,18
venta acciones	14500,00
ganancia	898,14

En t = 3	
costo hedging	5067,37
costo opciones	38,18
costo acc. faltantes	8931,82
venta acciones	14500,00
ganancia	462,63

Posibilidad 2



Tradicionales

quincena	precio acción	delta	Acciones compradas	costo	costo+interés	interés
0	1,45	0,5041	5041	7309,45	7309,45	15,35
1	1,2596	0,7625	2584	3254,81	10579,61	22,22
2	1,0942	1	2375	2598,73	13200,55	27,72
3	0,9505	1	0	0	13228,27	27,78
4	0,8256	0	0	0	13256,05	

costo hedging	13256,05
costo opciones	19,90
venta acciones	15200,00
ganancia	1924,05

costo hedging	13228,27
costo opciones	19,90
venta acciones	15200
ganancia	1951,83

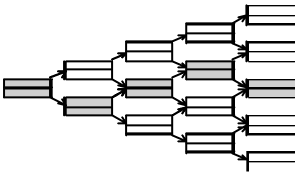
Lookback

quincena	precio acción	delta	Acciones compradas	costo	costo+interés	interés
0	1,45	0,5178	5178	7508,10	7508,1	15,77
1	1,2596	0,4713	465	585,71	6938,15	14,57
2	1,0942	0,243	2283	2498,06	4454,66	9,35
3	0,9505	0,1836	594	564,60	3899,42	8,19
4	0,8256	1	8164	6740,20	10647,81	

En t = 4	
costo hedging	10647,81
costo opciones	38,18
venta acciones	14500,00
ganancia	3814,01

En t = 3	
costo hedging	3899,42
costo opciones	38,18
costo acc. faltantes	7759,88
venta acciones	14500,00
ganancia	2802,52

Posibilidad 3



Tradicionales

quincena	precio acción	delta	Acciones compradas	costo	costo+interés	interés
0	1,45	0,5041	5041	7309,45	7309,45	15,35
1	1,2596	0,7625	2584	3254,81	10579,61	22,22
2	1,45	0,5459	2166	3140,70	7461,12	15,67
3	1,6692	0,1428	4031	6728,55	748,25	1,57
4	1,45	1	8572	12429,40	13179,22	

costo hedging	13179,22
costo opciones	19,90
venta acciones	15200,00
ganancia	2000,88

Lookback

quincena	precio acción	delta	Acciones compradas	costo	costo+interés	interés
0	1,45	0,5178	5178	7508,10	7508,1	15,77
1	1,2596	0,4713	465	585,71	6938,15	14,57
2	1,45	0,6645	1932	2801,40	9754,12	20,48
3	1,6692	1	3355	5600,17	15374,77	32,29
4	1,45	0	0	0	15407,06	

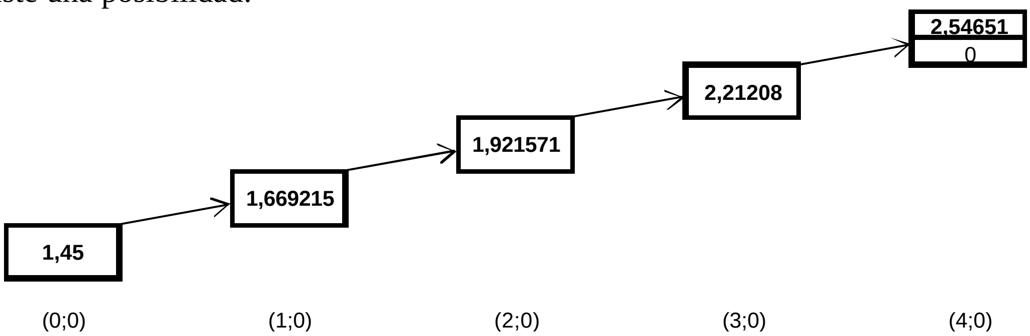
En t = 4		En t = 3	
costo hedging	15407,06	costo hedging	15374,78
costo opciones	38,18	costo opciones	38,18
venta acciones	16692,00	venta acciones	16692,00
ganancia	1246,76	ganancia	1279,04

Apéndice. Cálculos auxiliares (para opciones lookback)

Detalle de todos los caminos que puede seguir el precio de una opción hasta llegar a la posición (i,j) con $1=i=4, 0=j=4$.

Nodo (4,0)

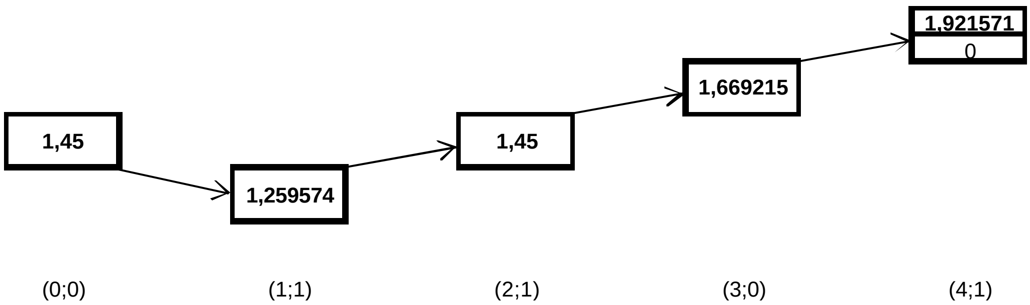
Sólo existe una posibilidad:



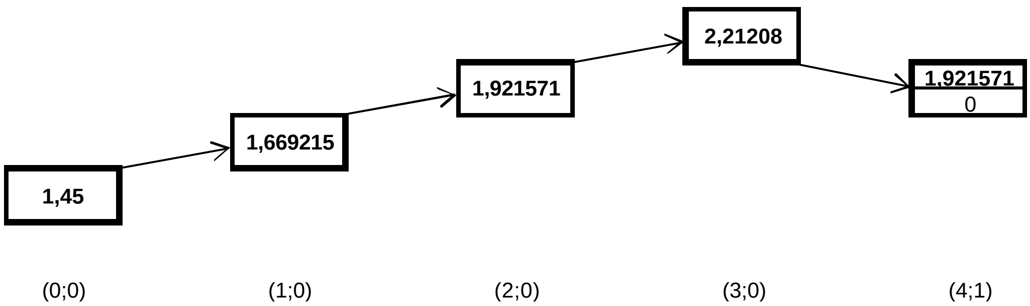
Nodo (4,1)

Para llegar a este nodo existen 4 posibilidades:

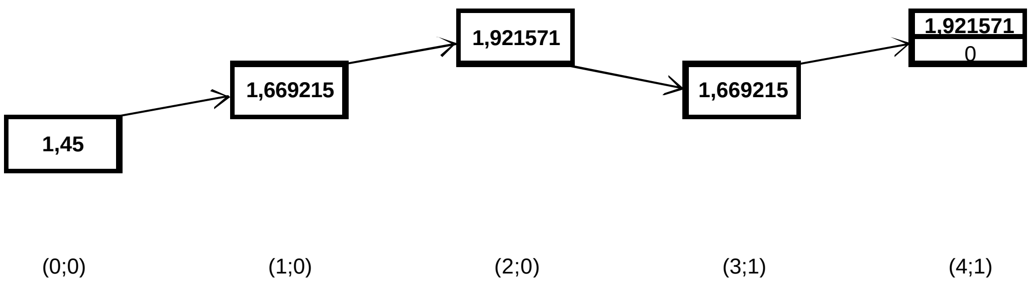
A)



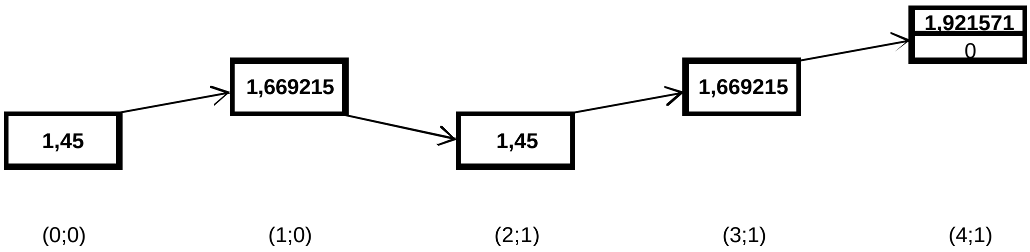
B)



C)



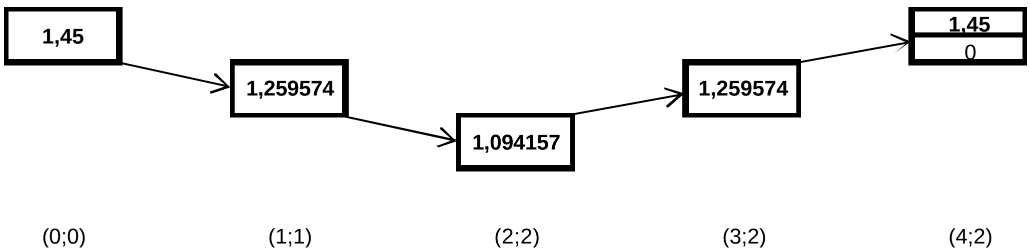
D)



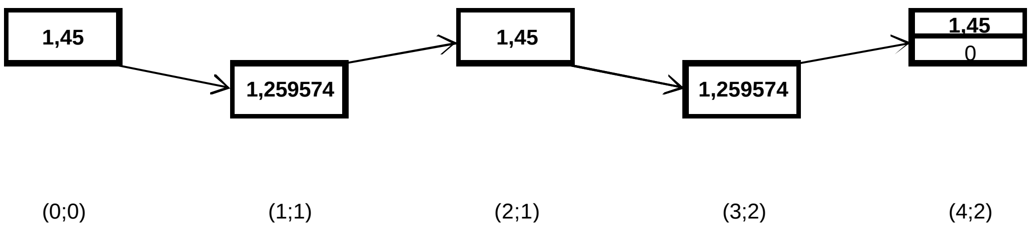
Nodo (4,2)

Para llegar a este nodo existen 6 posibilidades:

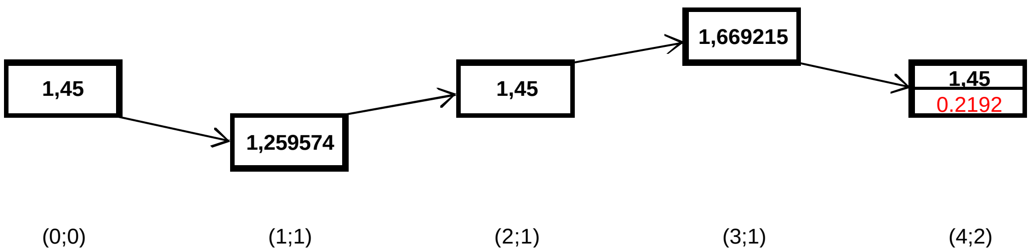
A)



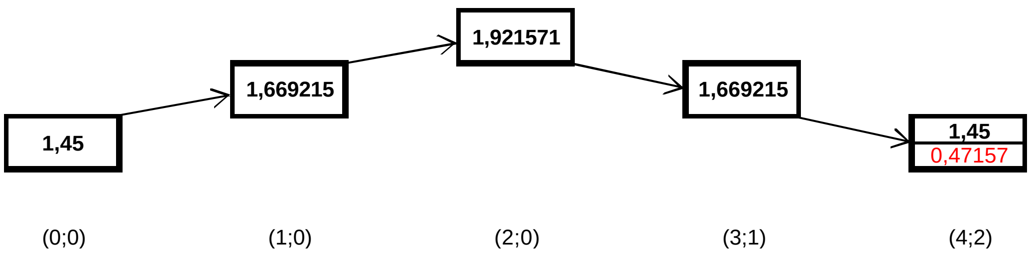
B)



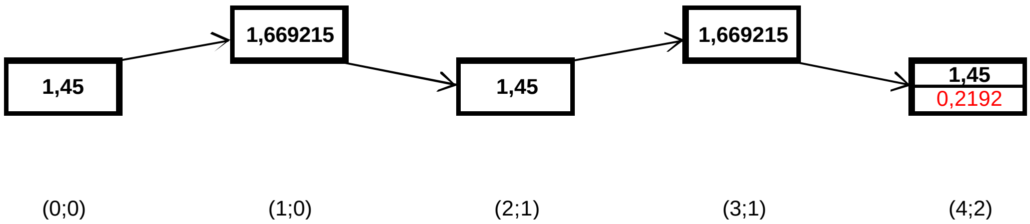
C)



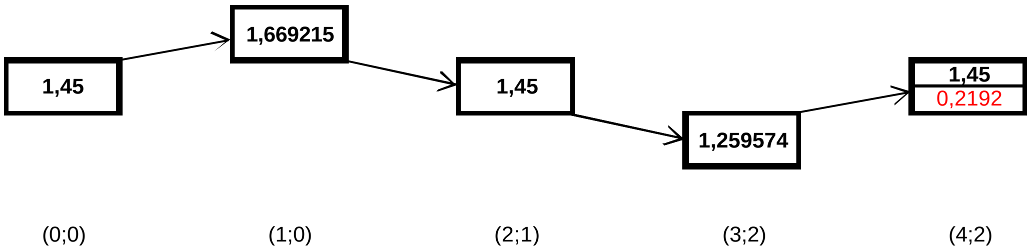
D)



E)



F)

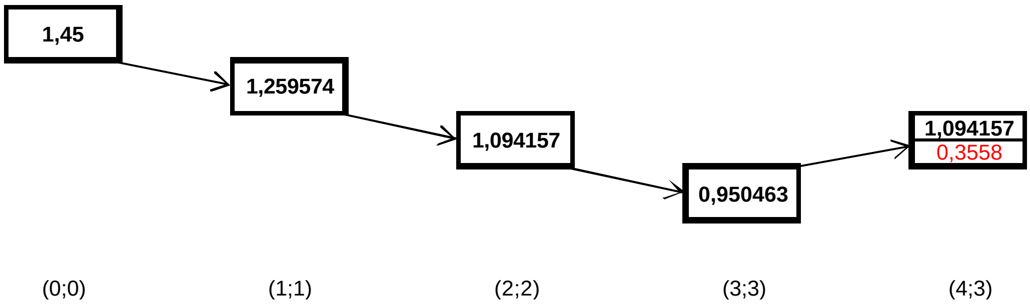


Se elige $máx\{\ 0;\ 0{,}2192;\ \mathbf{0{,}47157}\}$

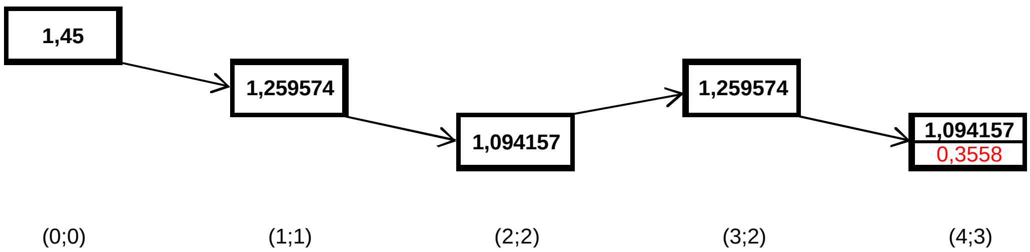
Nodo (4,3)

Para llegar a este nodo hay 4 caminos:

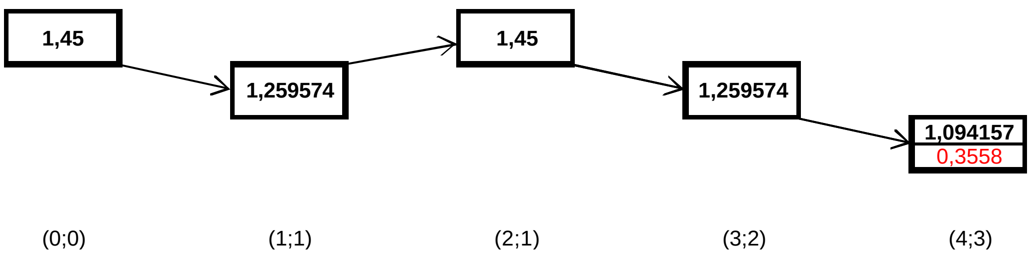
A)



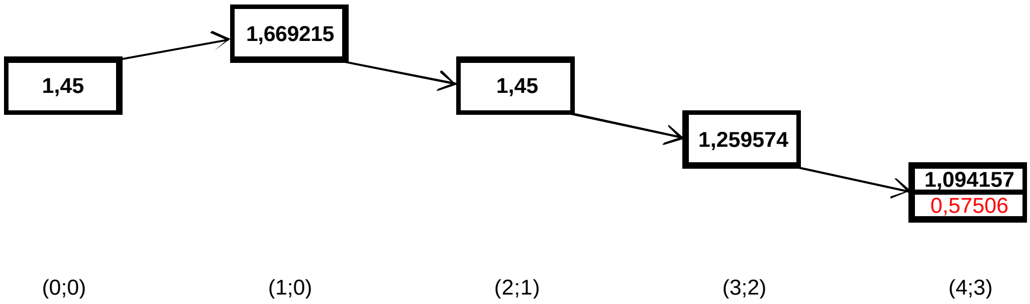
B)



C)

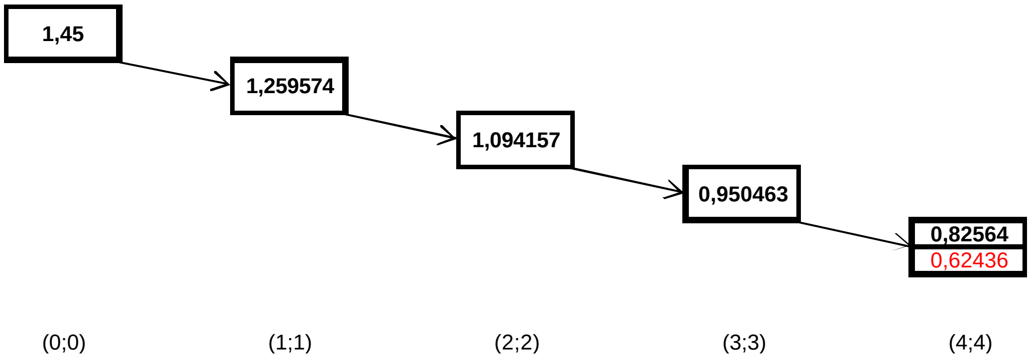


D)



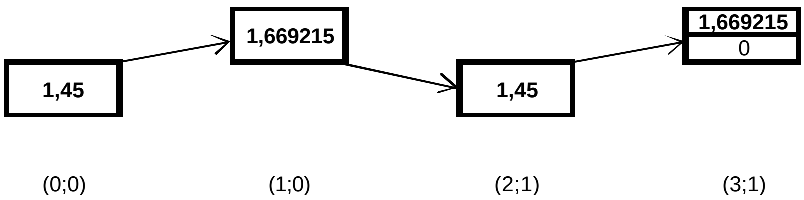
Se elige *máx*{ 0,3558; **0,57506**}

Nodo (4,4)

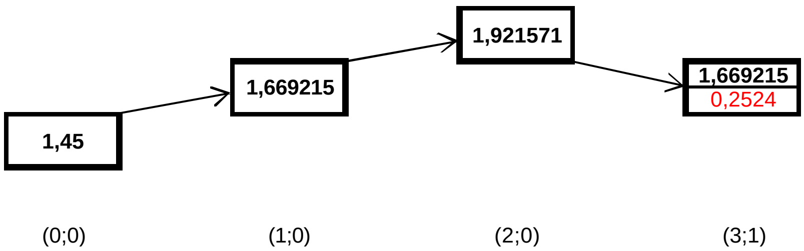


Nodo (3,1)

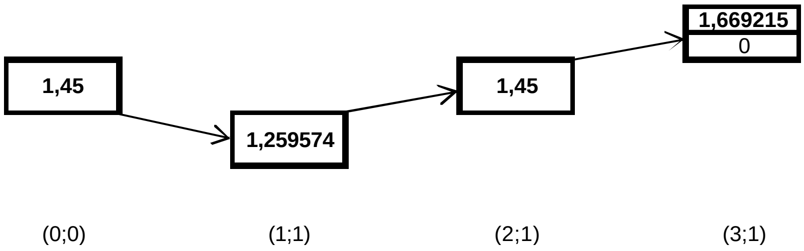
A)



B)

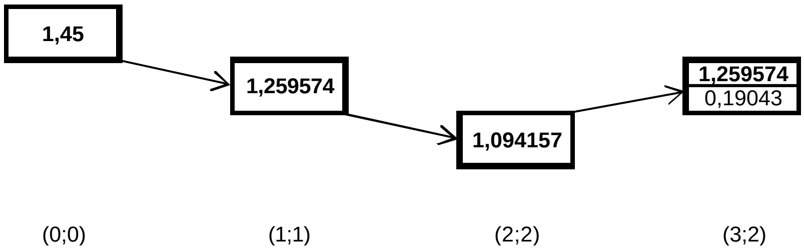


C)

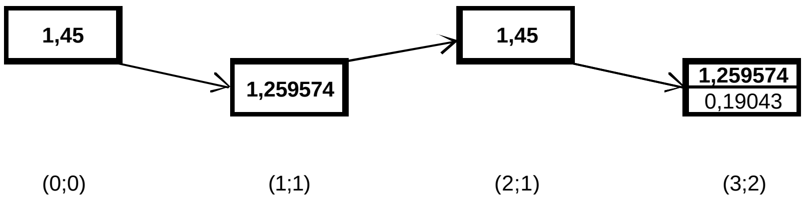


Nodo (3,2)

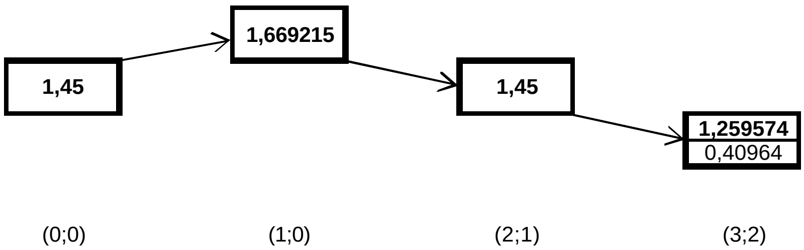
A)



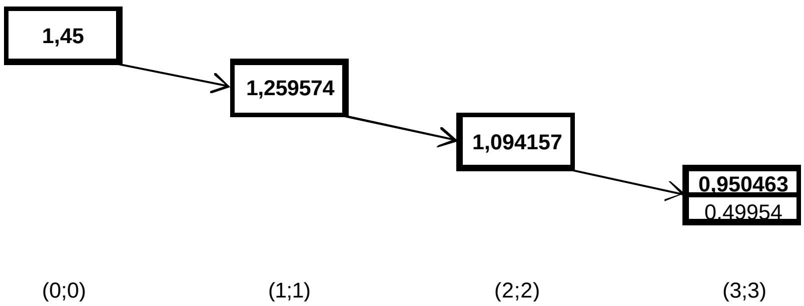
B)



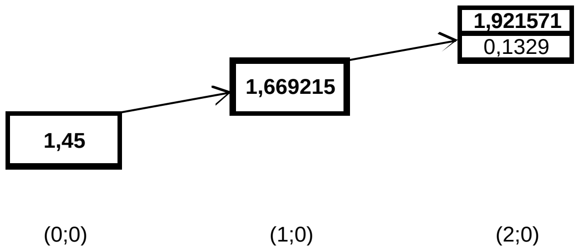
C)



Nodo (3,3)

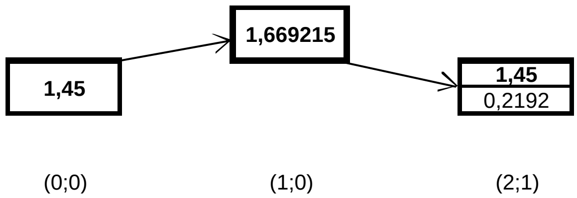


Nodo (2,0)

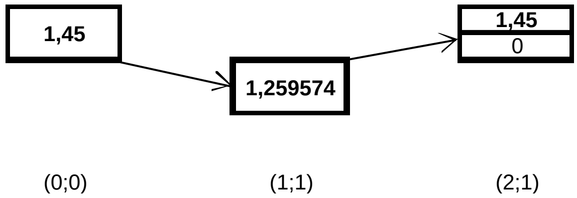


Nodo (2,1)

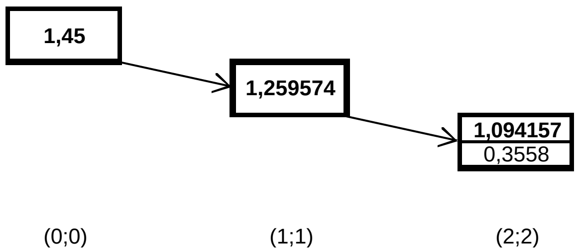
A)



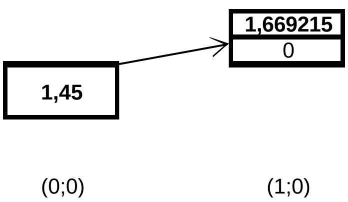
B)



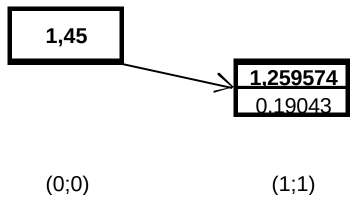
Nodo (3,2)



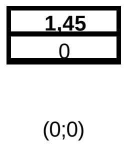
Nodo (1,0)



Nodo (1,1)



Nodo (0,0)



Notación

S_i	precio de la acción subyacente en el momento $t = i$.
X	precio de ejercicio
s	volatilidad
r	tasa anual
T	fecha de vencimiento
$f_{i,j}$	valor de la opción en el nodo (i,j)
d_t	cada uno de los n intervalos en el que se divide T

Bibliografía

Hull, John, *Fundamentals of futures and options markets,* 4^{th} Ed, Prentice Hall
Hull, John, *Options, futures & other derivatives*, 4^{th} Ed, Prentice Hall
Diario El Cronista comercial. 24/05/00.
DerivaGem (Software)

II. In memoriam L.A.Santaló

Introducción. Los árboles binomiales fueron los instrumentos básicos para valuar opciones de acciones y bonos, Europeas y Americanas. El modelo supone que los movimientos de los precios de los activos están formados por un gran número de pequeños movimientos binomiales. La utilidad básica esperada de un activo debe ser mayor que la provista por la tasa de interés libre de riesgo, *r*. La desviación típica, *s*, o volatilidad, del cambio en el precio del activo en un intervalo pequeño de tiempo, es fundamental en el proceso de valuación numérica.

En la próxima sección introduciremos las opciones Lookback, un caso representativo de opción exótica *dependiente del camino*. En el resto del texto el objetivo principal es obtener resultados de la aplicación de métodos trinomiales para la evaluación de estas opciones y otras similares dependientes del camino y comparar la performance de los algoritmos utilizados para obtener las distintas aproximaciones numéricas.

Los métodos que desarrollamos están enfocados en las opciones de tipo Lookback pero pueden ser aplicados a un conjunto completo de derivados de la misma clase tanto de opciones como de futuros.

El texto se ocupa también de la construcción eficiente de algoritmos algebraicos, aunque no se dan detalles de los algoritmos mismos por razones de reserva de la propiedad de la heurística o del *copyright* según el caso. Nuestros algoritmos ejemplo están basados en Matlab (pero pueden ser traducidos a cualquier sistema computacional.) El objetivo de desarrollar en Matlab es simplificar el proceso de vectorización y paralelización del algoritmo, lo que es necesario en el caso de la resolución de portafolios reales de activos y derivados (para cada uno se debe realizar un tratamiento similar y en la mayoría de los casos hay que tratar interacciones entre los valores de los productos.)

Opciones Lookback sobre acciones. Las opciones Lookback son aquellas opciones exóticas cuyo precio de ejercicio es el máximo valor que alcanza la acción durante la vida de la opción. Esto así dicho es una simplificación para el caso de las opciones de venta (put) puesto que existen diversos Lookbacks para puts y calls dependiendo de que se tengan en cuenta los valores máximos o mínimos en relación al valor actual o al de ejercicio de la opción y que el extremo se tome en forma continua o discreta en algunos puntos seleccionados del recorrido del precio del subyacente.

Las variantes de la definición simplificada previa llevan a productos similares que solamente necesitan algunas modificaciones del algoritmo original para ser tratados, por ello solo nos concentraremos en el caso enunciado teniendo en cuenta que los métodos desarrollados en realidad se aplican a un muy amplio espectro de productos dependientes del camino, no solamente Lookback, e.g. Asiáticas, donde se toma el promedio del valor de la acción subyacente a lo largo del recorrido, y este proceso puede ser continuo, parcialmente continuo o discreto.

El proceso de evaluación puede comenzar con la construcción del árbol binomial (ver más adelante el análisis trinomial que es el objetivo principal de este trabajo) que es necesario complementar con métodos de simulación y retro-recorrido en el árbol. En el momento de expiración de la opción el precio Lookback es conocido y entonces se inicia el proceso de recorrido del árbol hacia atrás para determinar el valor. Para opciones Europeas el proceso es directo pero para Americanas es necesario optimizar en cada uno de los nodos para decidir si el ejercicio temprano debe ser recomendado o no, como posibilidad, al cliente, ver Neuman 2000 para los detalles.

Tipos principales de opciones Lookback. Hay cuatro tipos principales de Lookback, divididos en dos clases, fijo y flotante:

1) *Fija (Fixed Strike):* El tipo fijo de opción Lookback solamente se establece en la forma de contado y tiene el precio de ejercicio predeterminado en el momento de su lanzamiento. El beneficio es (call) el máximo entre el precio óptimo y el precio de ejercicio (notar la diferencia con el put flotante):

$$c_{fijo} = \max(0, S_{\max} - K) \tag{1}$$

El beneficio del put es:

$$p_{fijo} = \max(0, K - S_{\min}) \tag{2}$$

2) *Flotante (Floating Strike)* La versión flotante fue introducida en 1979, puede tener beneficios que sean establecidos en efectivo o en activos, donde el ejercicio está dado como el valor óptimo del subyacente. Puede notarse que pese a que las opciones flotantes son opciones *per se*, siempre se ejecutan. El beneficio del call es

$$c_{flot} = \max(0, S - S_{\min}) \tag{3}$$

El beneficio del put es:

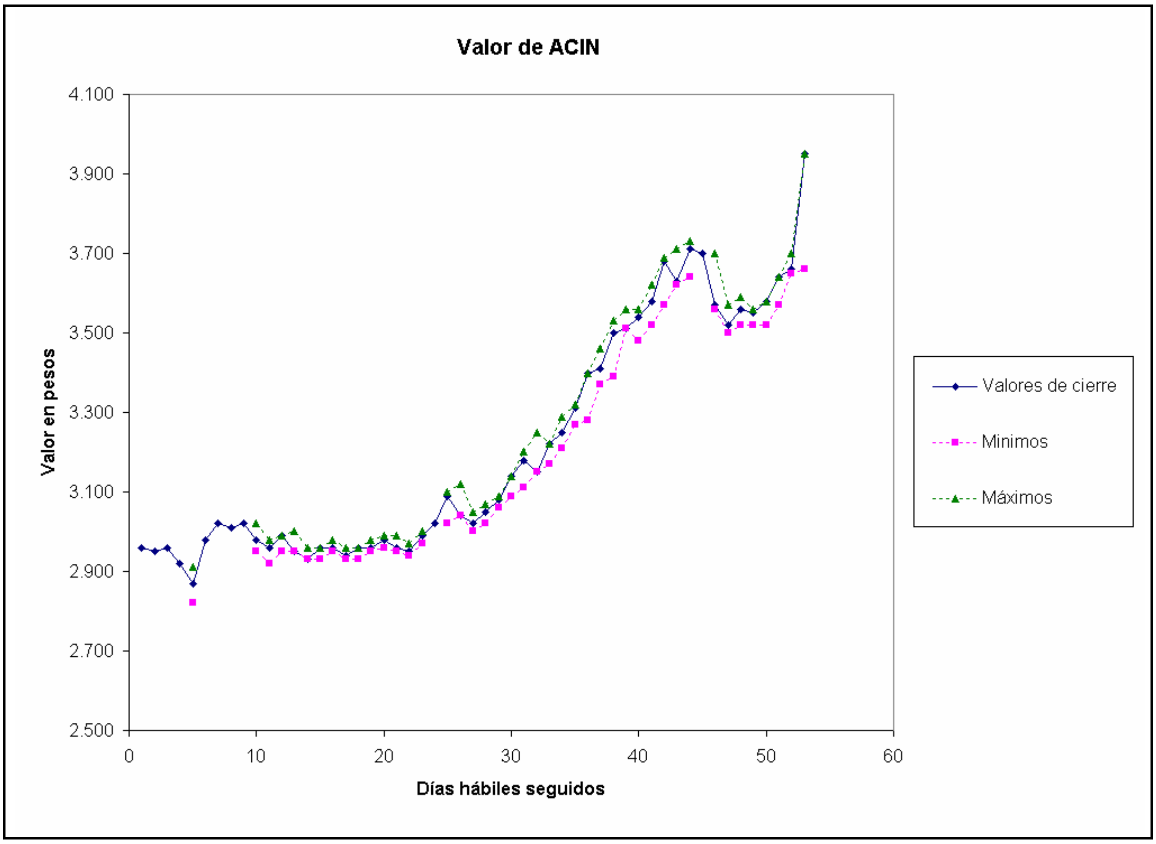
$$p_{flot} = \max(0, S_{\max} - S) \tag{4}$$

Los ejemplos en este texto los realizamos con este último caso.

Procedimiento para el Lookback binomial. El portafolio estándar para el Lookback binomial es, e.g. 100 call o put opciones (Americanas o, eventualmente, Europeas) que pueden ser:
clásicas: Vanilla
exóticas: e.g. Lookback

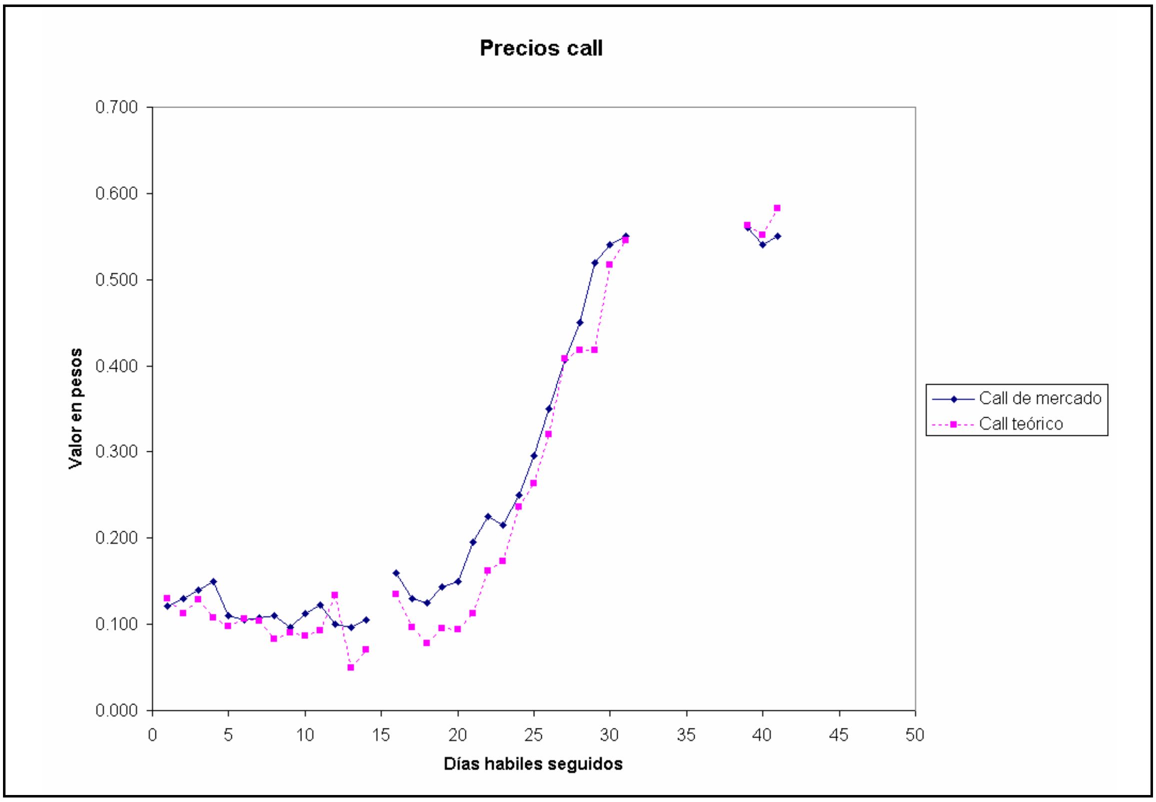
Cada opción está compuesta por 100 acciones. Consideremos la valuación de las opciones cuyos subyacentes no pagan dividendos. Ver Figura 1 para los datos del ejemplo que consideramos en este texto. En esta figura 1 representamos los valores de la acción ACIN (Acindar) desde Agosto de 2004 al 15 de octubre de 2004 en que expira la opción que estudiamos como ejemplo en este trabajo. (Datos tomados del periódico Ámbito Financiero). Solamente se consignan los días hábiles en que hay cotización. ACIN crece de $2.90 a $3.70 en el período de dos meses. Al principio del período el crecimiento es pausado pero después entra en un tramo de crecimiento más rápido. El objetivo es valuar las opciones al principio del período en la hipótesis de desconocimiento del devenir posterior del subyacente.

Figura 1 *Valores de la acción ACIN (Acindar) desde Agosto de 2004 al 15 de octubre de 2004 en que expira la opción que estudiamos como ejemplo en este trabajo. (Datos tomados del periódico Ámbito Financiero). Solamente se consignan los días hábiles en que hay cotización. ACIN crece de $2.90 a $3.70 en el período de dos meses*



En la figura 2 se muestra el análisis del call Vanilla para ACIN correspondiente a la figura 1. En lo que sigue queremos distinguir ese análisis del que hacemos en términos del derivado Lookback. Esta opción es la que se valúa tomando el máximo (versión más simple; máximo para el put, mínimo para el call) valor que alcanza la acción hasta el momento presente. Para el análisis binomial nos referimos a (Neuman 2004).

Figura 2 *Valores de la opción Call ACIN (Acindar) K=3.0, madurez el 15 de octubre desde Agosto de 2004. (Datos tomados del periódico Ámbito Financiero). Solamente se consignan los días hábiles en que hay cotización. ACIN crece de $0.10 a $0.60 en el período de dos meses*



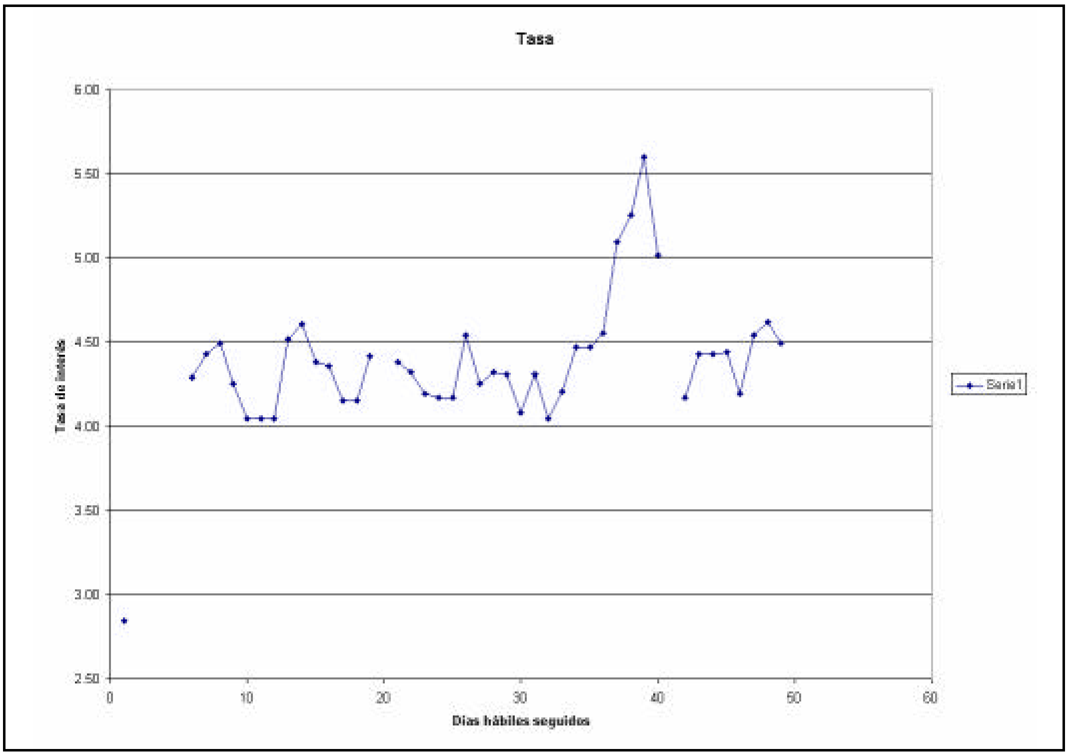
Antes de proseguir incluimos datos del balance de Acindar (indican que la acción subyacente probablemente tendrá un comportamiento positivo, fuente: Diario Ámbito Financiero, 20 de agosto de 2004, página 13):

Acíndar: Objeto social: ***Siderometalúrgica***

- Intensa actividad en colada continua: ganancias continuas
- Brillante nivel operativo
- Mejora del 48% respecto del ejercicio anterior
- Aumento del margen de ganancia: 43.3%(2003)-> 48%(2004)
- Buen flujo de ventas
- Buen margen de beneficios
- Aumento del resultado operativo de 2000 a 2004.

En la figura 3 se representa la tasa de interés teórica que se utiliza para el análisis de valor del call de la figura 2, nos referimos a Neuman (2004) para los detalles.

Figura 3 *Valores de la tasa de interés teórica r, asociada al análisis de la opción ACIN (ver Fig 1 y 2). (Datos tomados del periódico Ámbito Financiero).*



Valuación trinomial de Lookbacks. El valor de un Lookback call estándar europeo es (Hull 2000):

$$S_0 e^{-qT} N(a_1) - S_0 e^{-qT} \frac{s^2}{2(r-q)} N(-a_1) - S_{\min} e^{-rT} \left[N(a_2) - \frac{s^2}{2(r-q)} e^{Y_1} N(-a_3) \right] \qquad (5)$$

donde

$$a_1 = \frac{\log(\frac{S_0}{S_{\min}}) + (r - q + \frac{s^2}{2})T}{s\sqrt{T}} \qquad (6)$$

$$a_2 = a_1 - s\sqrt{T} \qquad (7)$$

$$a_3 = \frac{\log(\frac{S_0}{S_{\min}}) + (-r + q + \frac{s^2}{2})T}{s\sqrt{T}} \qquad (8)$$

$$Y_1 = -\frac{2(q - r - \frac{s^2}{2})\log(\frac{S_0}{S_{\min}})}{s^2} \qquad (9)$$

y S_{min} es el precio mínimo alcanzado por la acción hasta la fecha.

El valor de un Lookback put Europeo estándar es, análogamente:

$$S_{\max} e^{-rT} \left[N(b_1) - \frac{s^2}{2(r-q)} e^{Y_2} N(-b_3) \right] + S_0 e^{-qT} \frac{s^2}{2(r-q)} N(-b_2) - S_0 e^{-qT} N(b_2) \qquad (10)$$

donde

$$b_1 = \frac{\log(\frac{S_{max}}{S_0}) + (-r + q + \frac{s^2}{2})T}{s\sqrt{T}} \tag{11}$$

$$b_2 = b_1 - s\sqrt{T} \tag{12}$$

$$b_3 = \frac{\log(\frac{S_{max}}{S_0}) + (r - q - \frac{s^2}{2})T}{s\sqrt{T}} \tag{13}$$

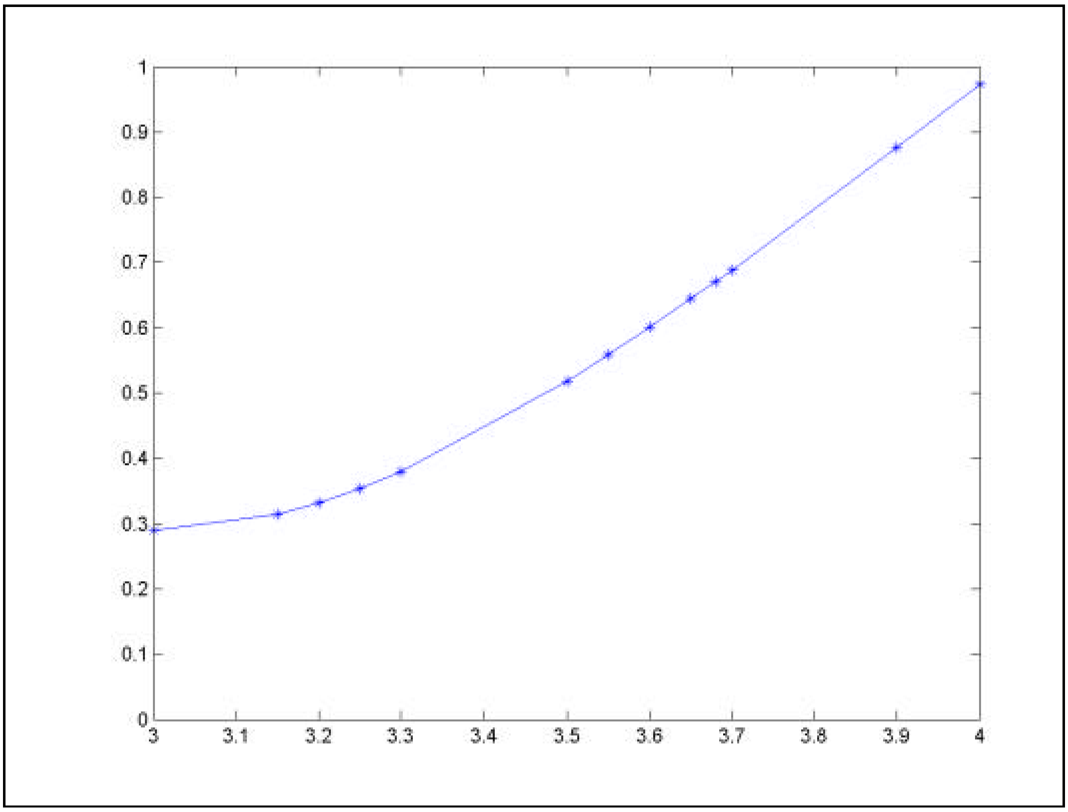
$$Y_2 = \frac{2(r - q - \frac{s^2}{2})\log(\frac{S_{max}}{S_0})}{s^2} \tag{14}$$

y S_{max} es el máximo valor alcanzado por el precio de la acción hasta la fecha.

El principal problema con estas expresiones es que son útiles para los Lookbacks estándar, si se conoce el valor máximo o mínimo correspondiente, cada variación (que es factible de ser tratada con el procedimiento numérico) conduce a problemas difíciles y en algunos casos imposibles donde no se presenta 'well posedness' en las ecuaciones de frontera. En el caso general se necesita un método numérico como MEF o DF (pero DF 'es' trinomial) para la solución numérica de los problemas de valuación en el caso de exóticas dependientes del camino.

Valores de Black-Scholes-Merton para el Lookback. En la figura 4 representamos el resultado de valuar con la formula (10) un Lookback put Europeo estándar. Se nota que comienza en el valor de 0.3 y cerca del máximo crece en forma lineal. Comparar con los valores del call Vanilla de la figura 2.

Figura 4 *Valores de la opción de venta Europea Lookback estándar en función de distintos valores para el máximo alcanzado antes del tiempo de ejercicio en la banda de valores que recorre la acción*



Lookbacks Americanos. La valuación de los Lookbacks Americanos (u otras opciones Americanas dependientes del camino) es un poco mas complicada porque es necesario decidir en cada nodo del árbol trinomial si el ejercicio temprano es mejor que la valuación hacia atrás y tomar el mejor de los dos valores. En consecuencia la complejidad del algoritmo aumenta en principio puesto que obligaría a recorrer todos los nodos del árbol trinomial. Aquí es donde es necesario excluir casos que no pueden darse y otros que no son factibles de modo de reducir la complejidad y mantener acotada la complejidad total.

Ecuaciones para el árbol discreto trinomial. El árbol trinomial es similar al binomial, pero hay tres posibilidades en cada paso (subir, medio, y bajar) Existen varias posibles determinaciones de los valores de estos incrementos y sus 'probabilidades' asociadas. Por simplicidad tomamos, como problema test las fórmulas del libro (Hull 2000), al tratar con diversas caminatas al azar se tienen que calibrar los parámetros.

$$u = e^{s\sqrt{3\Delta t}\frac{1}{b}}, \quad d=1/u, \;\; m=1, \; ud=m^2 \tag{15}$$

$$p_d = -\sqrt{\frac{\Delta t}{12s^2}}(r - \frac{s^2}{2}) = \frac{1}{6} \tag{16}$$

$$p_m = 2/3 \tag{17}$$

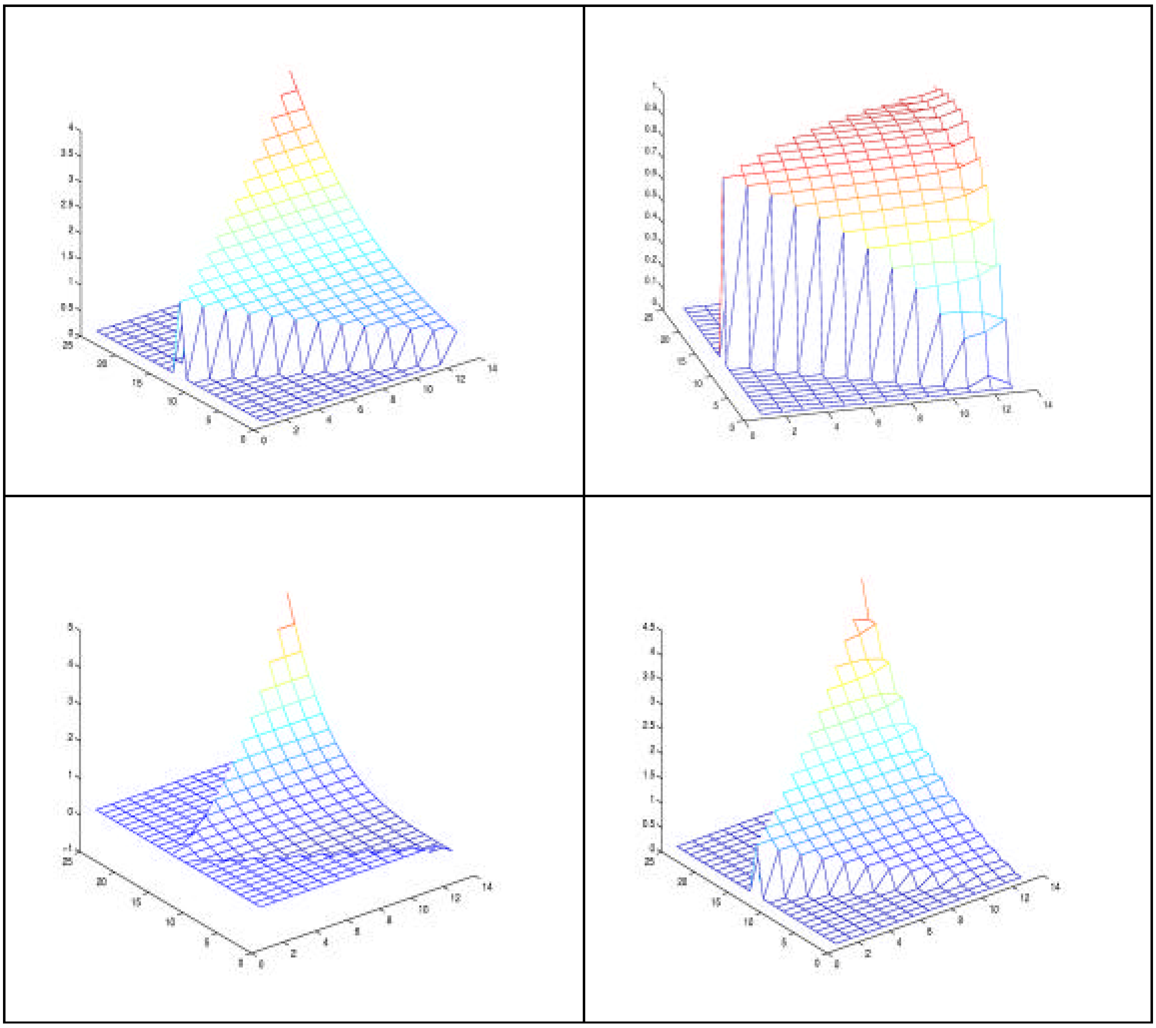
$$p_d = \sqrt{\frac{\Delta t}{12s^2}}(r - \frac{s^2}{2}) = \frac{1}{6} \tag{18}$$

Para una acción que paga un dividendo continuo con tasa *q*, se reemplaza *r* por *r-q* en estas ecuaciones. El factor de corrección de la ecuación (15) es necesario puesto que si se aplica el valor uno que figura en la bibliografía, el árbol no converge (comparar con Hull, 2000).

En las figuras 5 a 8 representamos los resultados para el caso del algoritmo de fuerza bruta (que considera todos los casos, complejidad exponencial de orden $O(3^n)$). En estas figuras representamos resultados trinomiales por el algoritmo de fuerza bruta (todos los casos) en 12 pasos. En la figura 5, S, valor de la acción. En la figura 6, p, valor de la opción. En la figura 7, S, diferencia para volatilidades 0.70 y 0.40. Y en la figura 8, p, diferencia para volatilidades 0.70 y 0.40. En todos los casos los datos fueron tomados de El Cronista Comercial (Buenos Aires, mayo 24 de 2000, S_0=1.45, X=1.52, r=0.0503, s=0.6945, T=0,1644). Comparar los valores de la figura 5 con los de la figura 1 (agosto-octubre 2004).

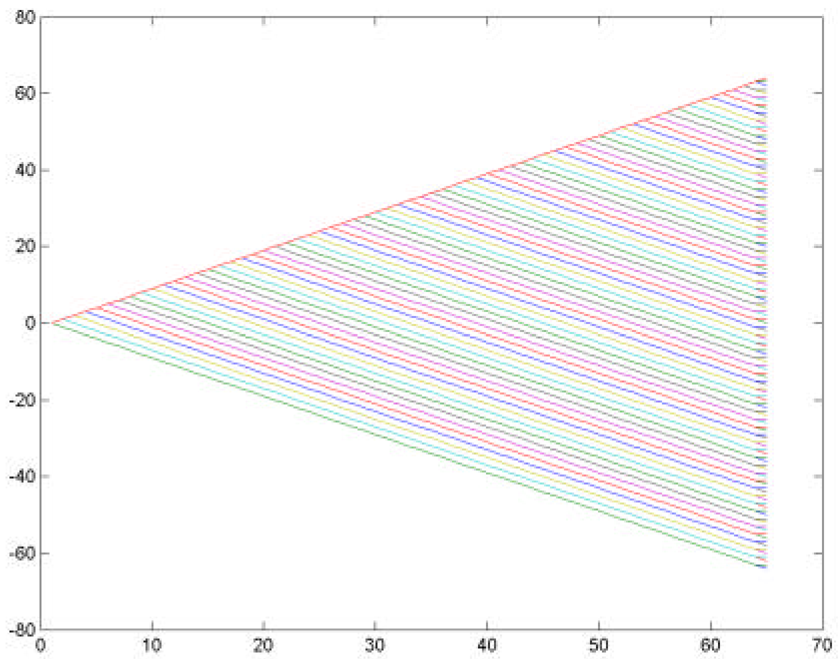
El principal problema con el análisis utilizando el algoritmo exhaustivo es la complejidad exponencial. Sin embargo esto no es necesario aquí, en esta clase de opciones exóticas (y en una amplia clase de opciones dependientes del camino) solo es necesario considerar el peor y el mejor (casos mínimo y máximo) e interpolar entre ellos. De este modo es posible estudiar solamente una cantidad lineal de casos. Con esta mejora la complejidad cae a $O(2n)$

Figuras 5 a 8 *Resultados trinomiales en 12 pasos.* ***(5)*** *(sup. izq.) S, valor de la acción* ***(6)*** *(sup. der.) p, valor de la opción* ***(7)*** *(inf. izq.) S, diferencia para volatilidades 0.70 y 0.40,* ***(8)*** *(inf. der.) p, idem. Datos tomados de El Cronista Comercial (Buenos Aires, mayo 24 de 2000, S_0=1.45, X=1.52, r=0.0503, s=0.6945, T=0,1644). Comparar los valores de la figura 5 con los de la figura 1 (agosto-octubre 2004)*



El siguiente paso es vectorizar el algoritmo. Esto se logra por el método de calcular todos los caminos al mismo tiempo, de modo que, cuando se dispone de un cluster paralelo de computadoras, el programa envía cada cálculo a un diferente procesador y este problema test (primera parte) se resuelve casi instantáneamente.

Figura 9 *Peores casos para árbol trinomial*



En el caso normal, cuando se considera un portafolio de activos y opciones clásicas y exóticas, la paralelización del algoritmo se hace más necesaria porque se deben distribuir las diferentes valuaciones de los productos entre los miembros del cluster y además aprovechar el resto de poder de computación paralelo para tratar las valuaciones mismas. En muchos casos se presenta correlación positiva entre los componentes del portafolio y también debe incluirse en el programa.

En los sucesivos ejemplos tratamos con los siguientes parámetros

3) S_0=3.00
4) K=3.00
5) r=0.045
6) s=0.30
7) T=0.1644

(ver figuras 1,2 y 3)

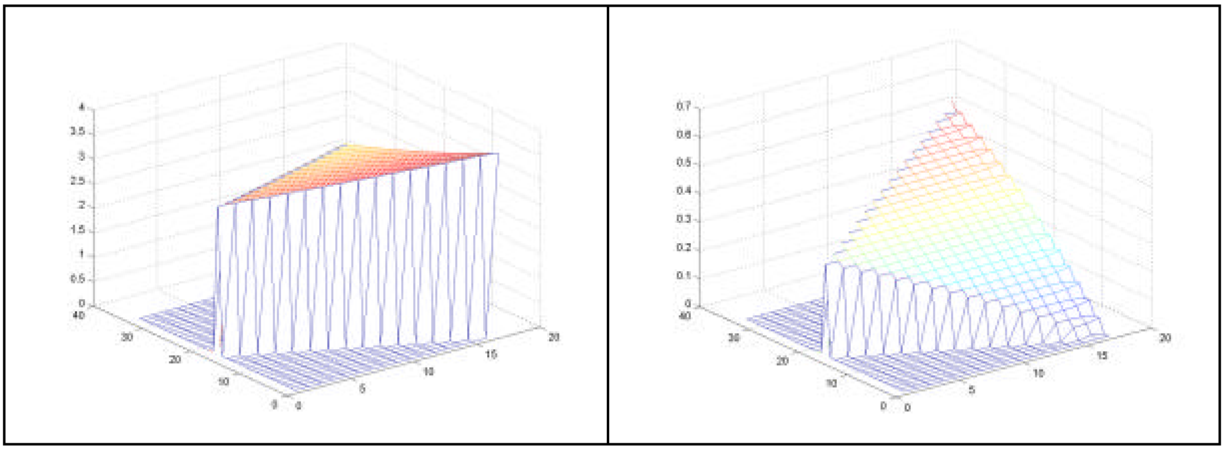
Las suposiciones son:

- Tasa de interés libre de riesgo
- Acciones subyacentes que no pagan dividendos en el período
- Utilización de inducción hacia atrás en el árbol.
- Para el caso de las opciones Americanas además hay que verificar en cada nodo por la posibilidad de ejercicio temprano comparando los valores respectivos: allí se decide entre seguir otro período o ejecutar inmediatamente la opción.

En las siguientes figuras representamos el resultado del árbol trinomial de valores de la acción y de la opción para una opción put Lookback Europea. El mismo método es aplicable para call Lookback, para los casos en que se efectúan muestreos discretos, para las opciones Asiáticas (promedios) Exóticas de cada clase, tanto continuamente como discretamente muestreadas y, también, un conjunto completo de Exóticos dependientes del camino.

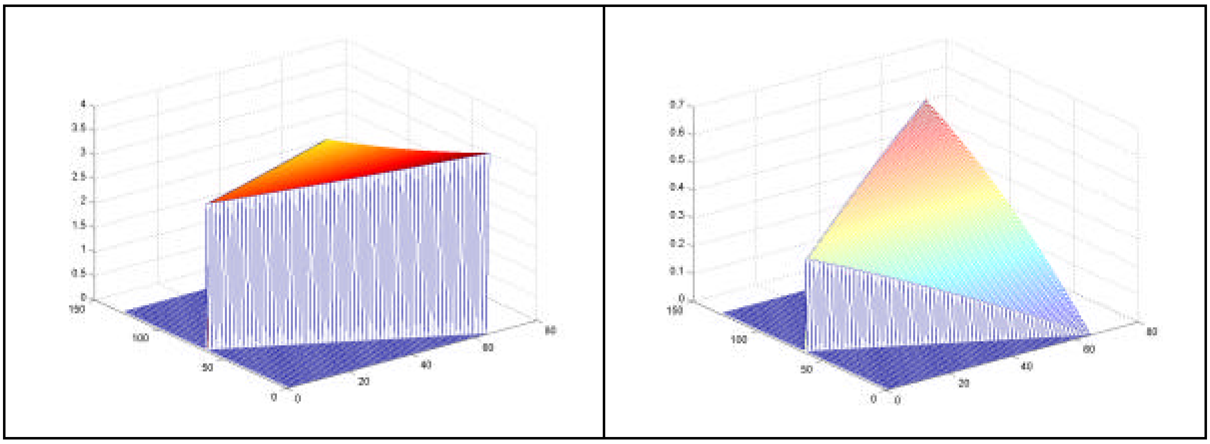
En primer término el caso en que se usan 16 pasos: allí el valor de *p*=\$0.3212:

Figuras 10 y 11 *Valores de S (subyacente) y p (Lookback) respectivamente para 16 pasos el valor de p=\$0.3212*



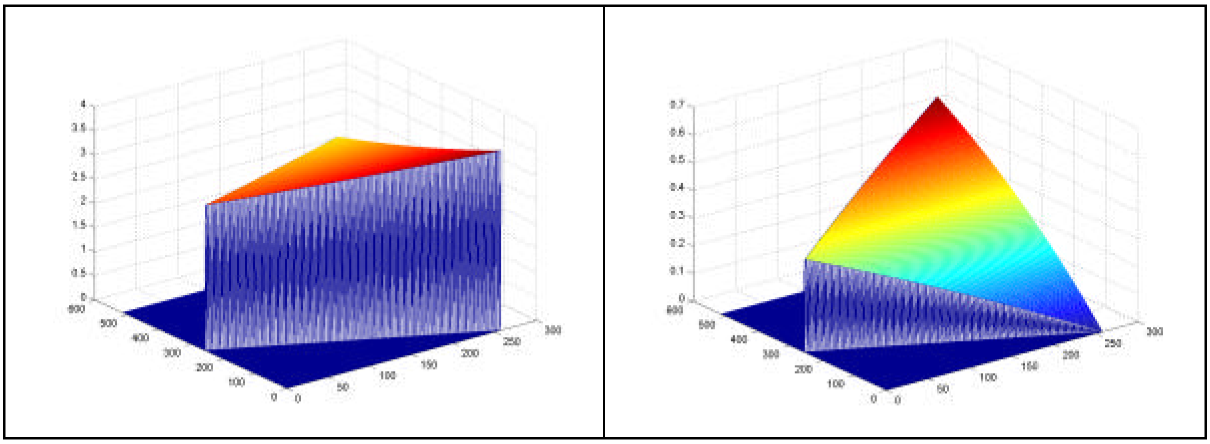
Se logra una aproximación mejor con más pasos: cuando se utilizan 64 pasos para *T*=1/6 se obtiene *p*=\$0.3302

Figuras 12 y 13*: Valores de S (subyacente) y p (Lookback) respectivamente para 64 pasos el valor de p=\$0.3302*



Cuando se refina mucho más, 256 pasos, se obtiene *p*=\$0,3324

Figuras 14 y 15: Valores de *S* (subyacente) y *p* (Lookback) respectivamente para 256 pasos el valor de *p*=\$0.3324



Comparar el resultado obtenido en este caso con el análisis del call (y del put por la paridad put-call) de la Figura 2.

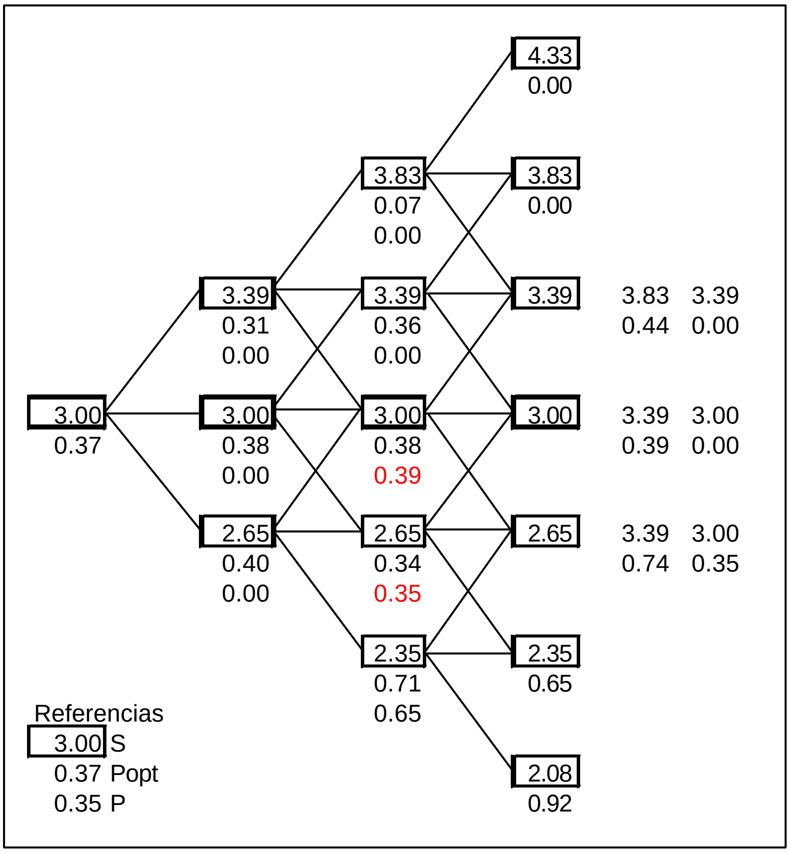
Estimación del orden empírico del método. Con los valores obtenidos se puede estimar el orden del método en primera aproximación:

$$\frac{0{,}3212 - 0{,}3302}{0{,}3302 - 0{,}3324} = 4{,}09 \tag{19}$$

de manera que el orden aproximado es uno. Con este orden, la extrapolación de los dos primeros valores da aproximadamente el tercero (0.3332).

Árbol para Lookback Americano. Realizamos un ejemplo discreto de pocos pasos para verificar los resultados numéricos y dar un ejemplo del caso Americano de ejecución anticipada. Debe notarse que la estimación del put coincide con la del caso Europeo y que para este ejemplo la variación es mínima y la ejecución anticipada es prácticamente teórica puesto que la diferencia de valores está por debajo del error de estimación. Aquí el valor que da el árbol es de P=0.37, teniendo en cuenta los valores de optimización en los nodos de posible ejecución anticipada. El valor no sería muy distinto si se tomara como Europea. Los pares de valores a la derecha de los nodos terminales centrales indican que puede haber más de un valor posible para un nodo terminal o central, eso lo tiene en cuenta el algoritmo puesto que toma la banda completa de valores posibles e interpola entre ellos según el caso en que esté en el nodo en cuestión, los detalles de esta operación son parte de la heurística del algoritmo y lo que permite reducir la complejidad.

Figura 16 *Árbol trinomial Lookback Americano con ejecución anticipada. Notar que el valor del put es P=0.37 (Lookback Americano)*



Muestreo continuo del Máximo. Se toma en consideración una opción de venta donde el valor máximo de la acción subyacente es medida de manera continua, i.e. Lookback put Europeo.

Cuando el valor máximo es actualizado en forma continua se tiene que el precio de la acción se mantiene menor o igual al máximo:

$$0 \leq S \leq J \tag{20}$$

Como es una opción que depende del camino su valor P será una función tal que:

$$P = P(S, J, t) \tag{21}$$

Se supondrá, siguiendo a Willmott (1997), que una cantidad dependiente del camino puede definirse como una integral:

$$I_n = \int_0^t \left(S(t)\right)^n \, dt \tag{22}$$

Sea :

$$J_n = (I_n)^{1/n} \tag{23}$$

La estrategia es considerar una opción que depende de J_n y tomar el límite para $n \to \infty$, entonces:

$$J = \lim_{n\to\infty} J_n = \underset{0\leq t\leq t}{máx}\, S(t) \tag{24}$$

Desde el instante t al $t + dt$, J_n cambia por una cantidad dJ_n dada por :

$$J_n + dJ_n = \left(\int_0^{t+dt} (S(t))^n \, dt \right)^{1/n} \tag{25}$$

Luego

$$dJ_n = \frac{1}{n} \frac{S^n}{(J_n)^{n-1}} dt \tag{26}$$

Así J_n es una variable determinística sin términos aleatorios.

Se procede al armado de un portafolio consistente en una opción y $-\Delta$ acciones:

$$\Pi = P - \Delta S \tag{27}$$

En un lapso de tiempo dt el valor del mismo cambia en:

$$d\Pi = dP - \Delta\, dS \tag{28}$$

Se elige:

$$\Delta = \frac{\partial P}{\partial S} \tag{29}$$

Se deduce, recordando que P depende de tres variables:

$$d\Pi = \frac{\partial P}{\partial t} dt + \frac{1}{n} \frac{S^n}{(J_n)^{n-1}} \frac{\partial P}{\partial J_n} dt + \tfrac{1}{2} s^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} dt \tag{30}$$

Como el beneficio debe superar el de la tasa libre de riesgo:

$$d\Pi \leq r\,\Pi\, dt = r\left(P - S\frac{\partial P}{\partial S} \right) dt \tag{31}$$

Para el caso de una opción europea en esta última se verifica la igualdad. Combinando las últimas dos expresiones se obtiene que:

$$\frac{\partial P}{\partial t}+\frac{1}{n}\frac{S^{n}}{(J_{n})^{n-1}}\frac{\partial P}{\partial J_{n}}+\tfrac{1}{2}s^{2}S^{2}\frac{\partial^{2}P}{\partial S^{2}}+rS\frac{\partial P}{\partial S}-rP\leq 0 \qquad (32)$$

Tomando límite cuando $n \to \infty$, como $S \leq máx\, S = J$ el coeficiente $\partial P / \partial J_n$ tiende a cero. Luego queda:

$$\frac{\partial P}{\partial t}+\tfrac{1}{2}s^{2}S^{2}\frac{\partial^{2}P}{\partial S^{2}}+rS\frac{\partial P}{\partial S}-rP\leq 0 \qquad (33)$$

Que es simplemente la ecuación de Black-Scholes-Merton, para una opción Europea. La variable independiente J aparece en ésta ecuación solamente como un parámetro y también aparece en las condiciones de frontera y final. La condición final es el beneficio en la fecha de vencimiento.

Por ejemplo para un Lookback de venta es:

$$P(S,J,T)=máx(J-S,0) \qquad (34)$$

De estas ecuaciones se obtienen las expresiones como la ecuación (10) que utilizamos para obtener valores *a posteriori* del put Lookback.

Muestreo discreto del máximo. Muchos contratos Lookback comerciales se basan en un máximo obtenido observando un conjunto discreto de momentos en el desarrollo del subyacente. Hay varias razones:

1) es más fácil medir en un conjunto pequeño de valores
2) todos los precios son reales
3) se evita en alguna medida precios en picos del subyacente
4) contratos más baratos por bajar la frecuencia del muestreo

Aquí la relación entre S y J, el máximo muestreado discreto, puede ser más compleja. El beneficio formalmente es el mismo pero puede pasar que la opción no se ejecute: no se ejecutará al expirar si S es mayor que J, por ejemplo.

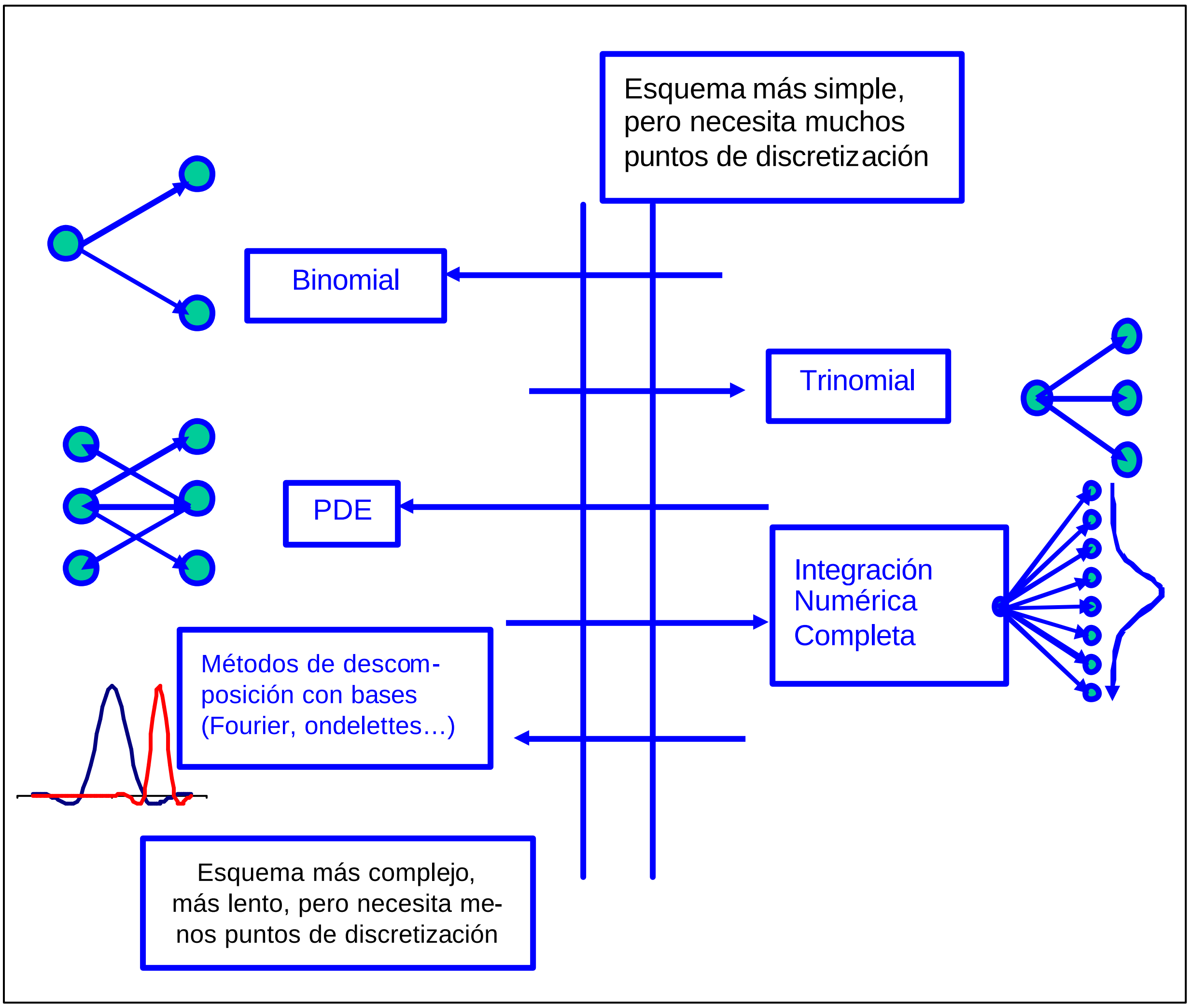
El algoritmo y los resultados son similares.

Algoritmos discretos. Los algoritmos que son aptos para los Lookbacks y la mayor parte de los derivados Exóticos dependientes del camino van desde el esquema binomial simple hasta los métodos más complejos basados en *ondelettes* (descomposición en bases).

El método trinomial, que, en esencia, es un método de diferencias finitas para aproximar las PDE tiene la propiedad plausible de ser simple de entender para el usuario no matemático, y, aunque aquí, el grupo interdisciplinario es casi obligatorio, en muchos casos es necesario explicar los resultados a un manager y la versión trinomial es suficientemente edible para lograr esa meta también.

En algunos casos tenemos variantes bien definidas de las PDE de Black-Scholes-Merton con condiciones de frontera no totalmente imposibles de tratar. Pero en buena parte de los casos, la deducción de estas es difícil y si el derivado, como suele ser la práctica, se pactó fuera de un mercado y es único, probablemente no sea razonable atacar el problema teórico de su valuación mediante herramientas analíticas (debido a que existen incertezas ocultas en los parámetros y datos iniciales y, también, en la estructura del portafolio donde el derivado se establece). El curso natural sería en estos casos el método algebraico o discreto. El mejor de estos (simple, preciso, adaptativo) es el trinomial.

Figura 17 *Métodos numéricos*



Así en este texto se han estudiado métodos trinomiales. Las clases principales de estos métodos tienen complejidad, para la primera parte de la construcción del árbol:

1) Árbol completo o lleno, complejidad $O(3^n)$
2) Montecarlo, por lo menos $O(n^3)$
3) Árbol simplificado, a lo sumo $O(d\ n)$, d un entero pequeño
4) Árbol simplificado con muestreo en puntos prescritos puede llevarse a algoritmo lineal.

y, para la segunda parte (construcción del valor recorriendo el árbol hacia atrás), en primera aproximación es $O(n^2)$ teniendo en cuenta que se interpola entre máximo y mínimo en los nodos, pero, mediante una selección cuidadosa de los nodos para evaluar, utilizando los valores teóricos para los adyacentes es posible acercarse al orden lineal (un algoritmo general de orden lineal todavía no lo hemos completado, lo mejor que hemos alcanzado, por técnicas de separación es un algoritmo $O(n \log n)$).

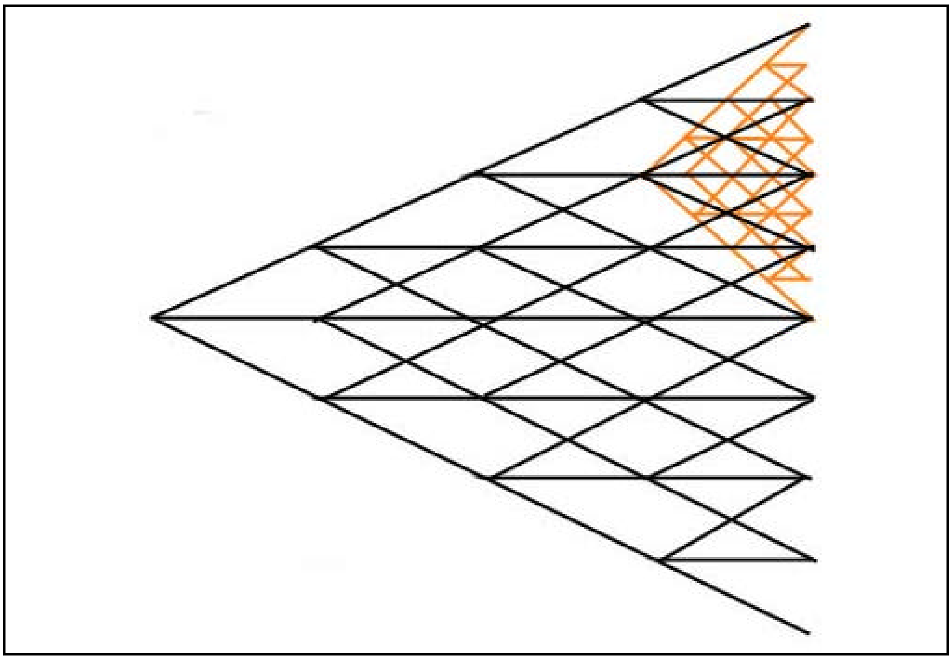
Si las opciones son Americanas en lugar de Europeas las complejidades no cambian (pero si las constantes de los órdenes).

Los métodos trinomiales son una clase de algoritmos simples y directos (una vez que se descubre cómo programarlos.) Los que en el esquema de la figura 17 están ubicados en el centro, implican una discretización o algebrización del problema pero lo mantienen en un formato comprensible para el observador no especialista. La principal ventaja del método trinomial es que es fácilmente comprensible y es muy útil para la comprensión completa de las principales características del proceso de valuación.

El núcleo del algoritmo lineal plus 'loglinear' no se describen en detalle por razones de reservar la heurística o copyright del programa pero las principales características (en lugar de su implementación en detalle) fueron descriptas en este trabajo.

Estimación del error y adaptatividad. Para la estimación de errores aplicamos métodos que hemos desarrollado en los últimos años (Bergallo, 2000). Los mismos se orientan a estimar los errores *a posteriori* basando el cálculo en la utilización de dobles mallas o mallas mixtas. En esta clase de problemas la estimación por dobles mallas resulta bien adaptada. Basada en la estimación del error y en la estimación de áreas críticas del árbol donde la determinación del valor debe ser más precisa es posible refinar el mismo. En la figura 18 mostramos un posible método para lograr la refinación de malla:

Figura 18 *Posible implementación de refinamiento de malla trinomial*



El método de mallas mezcla funciona mediante el *mezclado* de la malla actual con una mas gruesa (o mas fina), generalmente doblando el paso de modo que suele ser necesario trabajar con grillas potencias de dos, y promediando los valores en los nodos comunes (nodos a tierra). Los cálculos prosiguen como es habitual (lo que no altera el orden de complejidad) y de los *residuos* (ver Bergallo, 2000), calculados de la malla mezcla, es posible estimar el error a posteriori. Los criterios para el refinamiento son:

1) norma local de residuos mayor que el umbral de adaptatividad
2) zona crítica del árbol definida por la interacción del derivado con los otros componentes del portafolio, la estructura de las tasas de interés u otras razones
3) zona crítica del árbol asociada al muestreo de valores en la versión de muestreo discreto de estos Exóticos.

Conclusiones. En este texto hemos presentado un conjunto de algoritmos basados en métodos trinomiales que son lineales en el número de pasos de discretización y pueden hacerse lineales en el proceso completo. Sus características son:

- *Efectividad*: superan los métodos usuales binomiales y trinomiales en evaluación en los nodos y en la optimización en los mismos
- *Simplicidad*: hacen lineal la parte más compleja de construcción del árbol, y resuelven la cuestión frente a los métodos de tipo Montecarlo.
- *Precisión*: dan una precisión razonable que puede ser estimada por medio de métodos de dobles mallas o similares y que está en consonancia con la precisión de los datos y parámetros de entrada
- *Rapidez*: el orden del método facilita una gran rapidez de cálculo
- *Paralelizabilidad*: La versión vectorizada del algoritmo es implementable en clusters de computadoras paralelas. Se está desarrollando investigación en esta dirección en asociación con colegas del CIMEC, INTEC, Santa Fe.

En resumen el método es completo, es más rápido y da una cobertura completa del árbol de discretización.

El método propuesto es aplicable a una amplia clase de derivados Exóticos del tipo dependientes del camino: Lookbacks, opciones alfa-cuantiles, Lookbacks Asiáticas, opciones Hindsight, opciones Lookback repartidas, opciones Mocatta, Lookbacks de tiempo parcial, Lookback Quantificadas, swaptiones Bermudas, notas duales reversales Callable power, Asiáticas, etc) y permite muestreo discreto, es decir en un subconjunto de tiempos de evaluación, lo que es muy popular porque los derivados con muestreo discreto son más baratos que los de muestreo total.

Respecto de los métodos en sí en este trabajo hemos propuesto un factor de corrección a las fórmulas estándar para la caminata trinomial de Hull que permite calcular con precisión la caminata al azar (factor beta) y la hace independiente del número de pasos, aumentando así la precisión y, de hecho, corrigiendo un error típico de la literatura.

REFERENCIAS

Bergallo, M.B., Neuman, C.E., y Sonzogni, V.E., (2000) Composite mesh concept based FEM error estimation and solution improvement, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 188, 755—774.

Hull, John. (2000). *Options, Futures & Other Derivatives*, 4th edition, Prentice Hall.

Neuman, Carlos E. y Zanor (2004). Numerical valuation algorithms for exotic derivatives. I: The trinomial lookback case, *Mecánica Computacional*, 23

Wilmott, P., Howison, S., and Dewyne, J., (1997). *The Mathematics of Financial Derivatives*, Cambridge University Press, Cambridge.