

# EL MÉTODO TRINOMIAL PARA OPCIONES ASIÁTICAS Y OTRAS OPCIONES EXÓTICAS DEPENDIENTES DEL CAMINO

**Carlos Neuman**

*Departamento de Matemática (FIQ)  
Universidad Nacional del Litoral*

*SUMARIO: 1. Introducción; 2. Opciones asiáticas; 3. Modelo trinomial; 4. El método trinomial; 5. Extrapolación, estimación de errores, mejoramiento de la solución y el método de mallas mixtas; 6. Resultados; 7. Conclusiones.*

Para comentarios: [ceneuman@fiqu.unl.edu.ar](mailto:ceneuman@fiqu.unl.edu.ar)

*In memoriam EDUARDO MARÍA CANDIOTI (13 Oct 1931–24 Mar 2006)<sup>1</sup>*

*Resumen.* Se estudian versiones del método trinomial y métodos numéricos para el problema de valuación de opciones asiáticas. Estos derivados, que se negocian entre partes fuera de mercados estándar, resultan ser de una gran variedad de tipos que son definidos en este estudio, y su valor está asociado con el cálculo de promedios de los precios del activo subyacente durante la vida de la opción. Por eso pertenecen a la clase de opciones *dependientes del camino*, de lo que resulta, en principio, el crecimiento de la complejidad computacional en las aproximaciones numéricas. En el caso usual de realizar promedios aritméticos sólo existen en la literatura expresiones aproximadas para valuarlos, razón por la cual las estimaciones numéricas utilizando el denominado modelo trinomial son una alternativa razonable siempre que (1) se puedan estimar los errores de aproximación, (2) se puedan mejorar las soluciones aproximadas para lograr una valuación ajustada, y (3) se puedan diseñar algoritmos de construcción de esta solución aproximada con una complejidad computacional manejable. El desarrollo del método trinomial y los tres puntos mencionados se tratan y resuelven en el presente trabajo y se construyen métodos que se extienden, con las modificaciones necesarias, a otros tipos de opciones dependientes del camino.

Versión del tema expuesta en XXVI Jornadas Nacionales de Administración Financiera. El autor tiene en proceso una ampliación con otra metodología.

La investigación en que se basa este estudio es financiada parcialmente por el sistema CAI+D de la Universidad Nacional del Litoral, PI 12/H406.

---

<sup>1</sup> Un Hombre que, lamentablemente, no he tenido oportunidad de conocer lo suficiente, pero que a través de sus amigos y, por supuesto, de lo que he podido recibir de él directamente, ha dejado una profunda huella en mi espíritu y un camino para seguir (ver Candiotti (2004)).

Se efectúan asimismo comparaciones con las soluciones aproximadas al problema de las que se explica su deducción y que se obtienen en este trabajo y de la literatura. Para la obtención de resultados respecto de los puntos (1) y (2) se utilizan mallas trinomiales y refinamientos de las mismas con conjuntos coincidentes de nodos en los cuales se realizan promedios con los pesos adaptados al orden numérico del algoritmo base. El ajuste de estas mallas mixtas de manera de respetar las propiedades de evolución del valor del activo y su volatilidad es uno de los aspectos delicados del método lo que es tratado en el trabajo con el fin de optimizar el algoritmo propuesto. En lo que respecta al punto (3) se utiliza un sistema de interpolación y cálculo de promedios que reducen considerablemente varias de las fuentes de complejidad. Asimismo se puede establecer una estrategia de recorrido de los nodos que conduce a reducir el restante factor generador de complejidad numérica.

## 1. INTRODUCCIÓN

Los objetivos principales de este trabajo son

- 1) desarrollar varios aspectos prácticos y teóricos del método trinomial, y
- 2) obtener estimaciones de errores ‘a posteriori’ y mejorar la aproximación de las soluciones numéricas de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de Black-Scholes-Merton (BSM, ecuaciones del tipo de difusión), para el caso de opciones asiáticas de compra y venta de activos financieros para las que se estudian métodos de extrapolación y de mallas mixtas para el esquema trinomial.

La ecuación clásica BSM es

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \mathbf{s}^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = r f \quad \text{Ec 1}$$

con las condiciones de frontera e iniciales que corresponden a cada caso particular. En esta ecuación

$f$  es el valor de la opción clásica (*vanilla call o put*)

$r$  es la tasa de interés libre de riesgo

$S$  es el precio del subyacente de la opción, y

$\mathbf{s}$  es la volatilidad del subyacente.

Basamos los desarrollos en los resultados ya obtenidos en Bergallo et al. (2006) y Neuman y Zanor (2005), algunas de cuyas ecuaciones y otras planteadas aquí se apoyan en el libro clásico de Hull (1999). El objetivo de ello es evitar repeticiones de conceptos básicos para los que remitimos al lector a las referencias citadas y las que en ellas, asimismo, se encuentran.

Los derivados asiáticos –que se negocian entre partes fuera de mercados estándar– resultan ser de una gran variedad de tipos posibles que se definen en el artículo y su valor está asociado con el cálculo de promedios de los precios del activo subyacente durante la vida de la opción, lo que los hace pertenecer a la clase de opciones dependientes del camino. De ello resulta, en principio, el crecimiento de la complejidad computacional en las aproximaciones numéricas.

En el caso usual de realizar promedios aritméticos sólo existen en la literatura expresiones aproximadas para valuar esos derivados, razón por la cual las estimaciones numéricas utilizando el denominado modelo trinomial (equivalente al método de diferencias finitas explícitas aplicado a la ecuación de BSM correspondiente) son una alternativa razonable siempre que

- 1) se puedan estimar los errores de aproximación,
- 2) se puedan mejorar las soluciones aproximadas para lograr una valuación ajustada, y
- 3) se puedan diseñar algoritmos de construcción de esta solución aproximada con una complejidad computacional manejable.

Los tres puntos mencionados se tratan y resuelven en el presente trabajo, y se desarrollan métodos que se extienden –con las modificaciones necesarias– a otros tipos de opciones dependientes del camino.

Se efectúan asimismo comparaciones con las soluciones aproximadas al problema, de las que se explica su derivación y que se obtienen de la literatura.

Para la obtención de resultados respecto de los puntos (1) y (2) se utilizan mallas trinómicas y refinamientos de las mismas con conjuntos coincidentes de nodos en los cuales se realizan promedios con los pesos adaptados al orden numérico del algoritmo base. El ajuste de estas mallas mixtas, de manera de respetar las propiedades de evolución del valor del activo y su volatilidad, es uno de los aspectos delicados del método, lo que es tratado en el trabajo con el fin de optimizar el algoritmo propuesto.

En lo que respecta al punto (3) se utiliza un sistema de interpolación y cálculo de promedios que reduce considerablemente varias de las fuentes de complejidad.

Asimismo se puede establecer una estrategia de recorrido de los nodos que conduce a reducir el restante factor generador de complejidad numérica.

El método propuesto es aplicable a una amplia clase de derivados exóticos del tipo dependientes del camino: lookbacks, opciones alfa-cuantiles, lookbacks asiáticas, opciones hindsight, opciones lookback repartidas, opciones mocatta, lookbacks de tiempo parcial, lookback cuantificadas, swaptiones Bermudas, notas duales reversales callable power, asiáticas, y muchas otras más, y permite muestreo discreto (es decir, en un subconjunto de tiempos de evaluación), lo que es muy popular porque los derivados con este tipo de muestreo son más baratos que los de muestreo total o continuo.

En lo que sigue del artículo se trata una sección dedicada a las opciones asiáticas donde se analiza la distribución final de promedios del precio del subyacente, puesto que la valuación de estos derivados depende de ella. La siguiente sección se dedica al método trinomial. Allí se compara este último con el resultado del clásico método binomial. Completado el análisis del mismo se consideran brevemente las mallas mezcla y sus posibilidades para el mejoramiento de soluciones y la estimación de errores. A continuación se aplican los métodos desarrollados a dos casos: primero un ejemplo de la literatura con el fin de comparar nuestros resultados con los publicados previamente, y en segundo término dos ejemplos de opciones del mercado local. Por último se establecen unas breves conclusiones de lo realizado.

## 2. OPCIONES ASIÁTICAS

Las opciones asiáticas son una clase muy desarrollada de opciones exóticas dependientes del camino donde el pago final está asociado al promedio de los precios a los que cotizó el subyacente durante el período de vigencia de la opción hasta el momento de su ejecución o expiración. Pueden ser de tipo europeo o americano.

En el caso en que el promedio  $\bar{S}$  se calcula teniendo en cuenta todos los valores del subyacente  $S$  en el período de análisis, el pago de la opción de compra de precio promedio (*average price call*) es

$$C_T = \max \{0, \bar{S} - K\} \quad Ec 2$$

y el de la opción de venta de precio promedio (*average price put*) es

$$C_T = \max \{0, K - \bar{S}\} \quad Ec 3$$

donde  $K$  es, como en la notación estándar, el precio de ejercicio de la opción, y  $\bar{S}$  es el promedio de los precios del subyacente calculado hasta el tiempo de ejercicio  $T$ ;  $C_T$  y  $P_T$  son así el valor del *average price call* y del *average price put* en el tiempo final.

El pago de la opción de compra de promedio de ejercicio (*average strike call*) es

$$c_T = \max \{0, S_T - \bar{S}\} \quad \text{Ec 4}$$

Y el de la opción de venta de promedio de ejercicio (*average strike put*) es

$$p_T = \max \{0, \bar{S} - S_T\} \quad \text{Ec 5}$$

donde  $S_T$  es el precio del subyacente en el momento  $T$  de ejercicio de la opción;  $c_T$  y  $p_T$  son así el valor del *average strike call* y del *average strike put* en el tiempo final.

De este modo, sin incluir nuevas variantes, tenemos veinticuatro clases de opciones asiáticas según se tomen los promedios aritméticos (lo usual y, de hecho lo que haremos en este trabajo), geométricos o armónicos.

Existe una gran variedad adicional de estas opciones dependiendo de la forma cómo se calcula el promedio  $\bar{S}$ : éste puede ser calculado en forma continua como hemos supuesto hasta ahora o solamente teniendo en cuenta los valores del subyacente en momentos definidos y discretizados del tiempo de duración de la opción. Otro factor que incrementa el número de posibles asiáticas es si los promedios se realizan pesando los distintos valores o sin pesarlos (peso unitario constante), por ejemplo una posibilidad común es la de dar más peso a los valores más recientes del subyacente que a los más antiguos (pesos crecientes).

Por razones de simplicidad y teniendo en cuenta que para ser aplicados a los restantes casos solamente hay que efectuar pequeños ajustes en los algoritmos, en este trabajo vamos a concentrar los ejemplos en el caso del *average price call* con promedio  $\bar{S}$  aritmético continuo.

Cuando se toman promedios aritméticos la distribución de éstos no tiene propiedades analíticas que permitan calcular una solución explícita utilizando BSM directamente. La ecuación correspondiente (opciones exóticas dependientes del camino, caso de promedios) es

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS \frac{\partial f}{\partial S} + S \frac{\partial f}{\partial I} + \frac{1}{2} \mathbf{s}^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = r f \quad \text{Ec 6}$$

donde

$$I = \frac{1}{t} \int_0^t S(t) dt \quad \text{Ec 7}$$

$r$  es la tasa de interés libre de riesgo

$\mathbf{s}$  es la volatilidad del precio  $S$  del subyacente, y

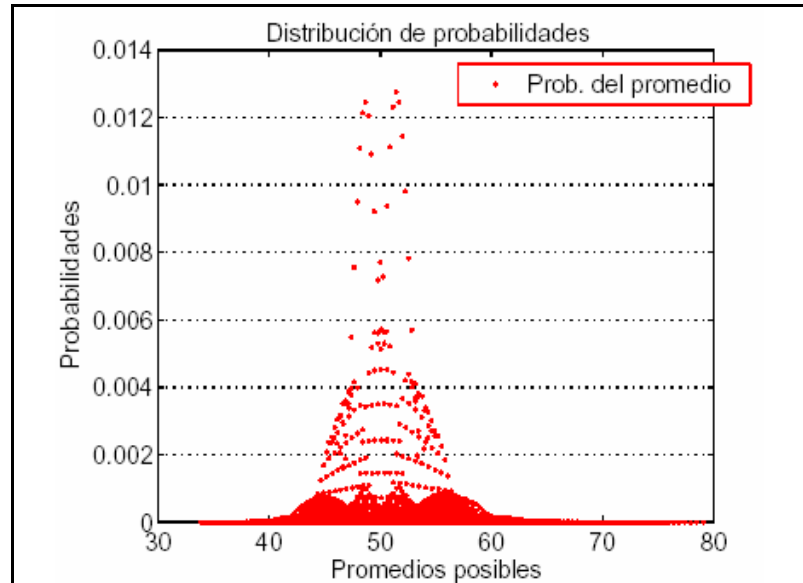
$f$ , el valor de la opción, representa a  $C$  para las opciones de compra (*average price call*), y a  $P$  para las opciones de venta (*average price put*).

Sin embargo, en la figura 1 es posible observar que la distribución de los promedios no satisface la hipótesis de lognormalidad necesaria para la correcta utilización de BSM.

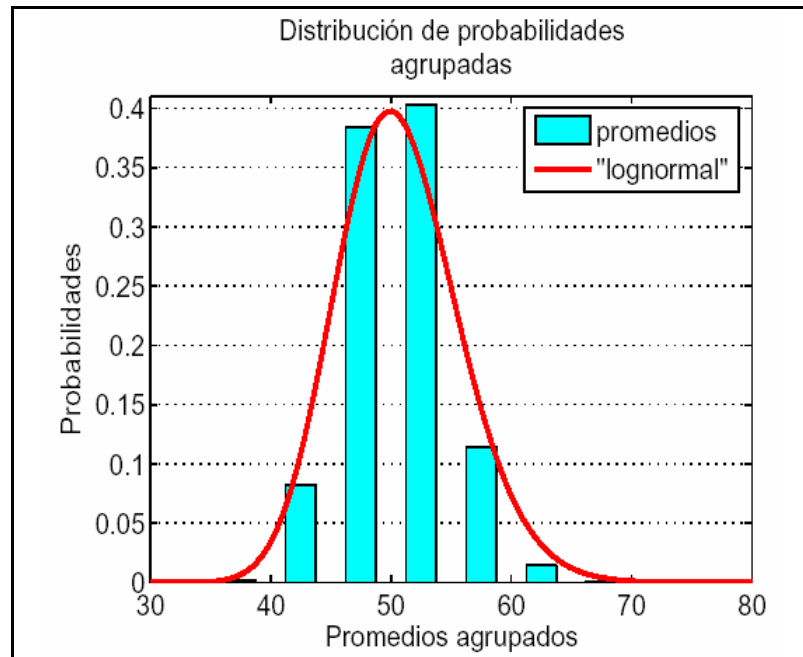
En la figura 2 se suman las probabilidades por clase y se superpone la forma de la distribución lognormal para comparación. Aquí se observa una cierta similitud, pero ésta se hace cada vez menos aproximada al aumentar el número de pasos del árbol, según va tendiendo al caso continuo. Cabe destacar que el primer momento de la distribución discreta es  $\bar{S}_{1d} = 50,4293$  mientras que el correspondiente a la continua es  $\bar{S}_1 = 52,5855$ , lo que apoya lo mencionado precedentemente.

Para este caso (por ejemplo observando la figura 2) es posible realizar una aproximación suponiendo que la distribución de promedios es cuasi lognormal y calculando los primeros dos momentos de la misma bajo la hipótesis habitual de BSM, es decir, lognormalidad y la evolu-

**Figura 1**  
**Probabilidades individuales de los promedios alcanzados en el árbol trinomial de 13 pasos con los datos correspondientes al ejemplo 1.** (Ver sección 6.1)



**Figura 2**  
**Probabilidades agrupadas por clases de los promedios alcanzados en el árbol trinomial de 13 pasos con los datos correspondientes al ejemplo 1.** (Ver sección 6.1). Se superpone la forma de la distribución lognormal para comparación.



ción en un mundo neutral al riesgo. En nuestro caso, si llamamos  $\bar{S}_1$  y  $\bar{S}_2$  al primero y segundo momentos se puede expresar

$$\bar{S}_1 = \frac{e^{rT} - 1}{rT} S_0 \tag{Ec 8}$$

y

$$\bar{S}_2 = \frac{2e^{(2r+s^2)T} - 1}{(r+s^2)(2r+s^2)T^2} + \frac{2S_0^2}{rT^2} \left( \frac{1}{2r+s^2} - \frac{e^{rT}}{r+s^2} \right) \tag{Ec 9}$$

de este modo vale (BSM, aproximadamente)

$$C = C_0 = e^{rT} (\bar{S}_1 N(d_1) - K N(d_2)) \tag{Ec 10}$$

Recordemos que  $C$  es el valor de la opción de compra (*average price call* en el tiempo inicial), con

$$d_1 = \frac{\log\left(\frac{\bar{S}_1}{K}\right) + \frac{\mathbf{s}^2 T}{2}}{\mathbf{s} \sqrt{T}} \quad \text{Ec 11}$$

$$d_2 = \frac{\log\left(\frac{\bar{S}_1}{K}\right) - \frac{\mathbf{s}^2 T}{2}}{\mathbf{s} \sqrt{T}} \quad \text{Ec 12}$$

$$d_2 = d_1 - \mathbf{s} \sqrt{T} \quad \text{Ec 13}$$

y

$$\mathbf{s}^2 = \frac{1}{T} \log\left(\frac{\bar{S}_2}{\bar{S}_1^2}\right) \quad \text{Ec 14}$$

Por último en la ecuación 10  $N(x)$  denota la normal acumulada hasta el puntaje  $x$ .

### 3. MODELO TRINOMIAL

#### 3.1. Un problema

En cada período una acción, o cae 1 con probabilidad 0,39, o se mantiene igual con probabilidad 0,20, o sube 1 con probabilidad 0,41. Suponiendo que los cambios en los períodos sucesivos son independientes, aproximar la probabilidad que, después de 700 períodos, la acción esté arriba más de 10 respecto del precio de partida.

#### 3.2. Una respuesta

La media de la distribución es  $\mu = 0,41 - 0,39 = 0,02$  y la varianza es  $\mathbf{s}^2 = 0,41 + 0,39 - \mu^2 = 0,7996$  de modo que después de 700 períodos se tiene  $n\mu = 14$  y  $\sqrt{n} \mathbf{s} = 23,6584$ .

Utilizamos el teorema central del límite para establecer que

$$P\{S > 10\} = P\left\{\frac{S - 14}{23,6584} > \frac{10,5 - 14}{23,6584}\right\} = P\{Z > -0,1479\} = 0,5588 \quad \text{Ec 15}$$

#### 3.3. Densidad trinomial

Suponemos que se tienen tres resultados mutuamente exclusivos y exhaustivos,  $E_1$ ,  $E_2$ , y  $E_3$  (lo que se puede generalizar a un número finito de resultados en forma directa). Se realizan  $n$  ensayos independientes y se definen las variables aleatorias  $X_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  donde

$$X_i \text{ es el número de ocurrencias de } E_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad \text{Ec 16}$$

Se tiene que

$$\sum_{i=1}^3 X_i = n \quad \text{Ec 17}$$

Esta restricción permite considerar que el modelo queda definido por las probabilidades de la distribución conjunta de las primeras dos variables aleatorias puesto que la tercera se obtiene de la ecuación 17.

La densidad conjunta resulta así:

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = P\{X_1 = x_1, X_2 = x_2\} = \frac{n!}{x_1! x_2! (n - x_1 - x_2)!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} q^{(n - x_1 - x_2)} \quad Ec 18$$

y se tiene que

$$\sum \frac{n!}{n_1! n_2! (n - n_1 - n_2)!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} q^{(n - n_1 - n_2)} = (p_1 + p_2 + q)^n \quad Ec 19$$

de manera que la función generadora de momentos es

$$Y_{X_1, X_2}(t_1, t_2) = (p_1 e^{t_1} + p_2 e^{t_2} + q)^n \quad Ec 20$$

y la función característica

$$f_{X_1, X_2}(t_1, t_2) = (p_1 e^{it_1} + p_2 e^{it_2} + q)^n \quad Ec 21$$

*Ejercicio* (Feller, pág. 246) (ver Feller, 1973). Sea  $(X_1, X_2)$  un vector aleatorio cuya distribución conjunta es la trinomial definida por (18). Hallar

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_1) & (= np_1), \\ \mathbb{E}(X_2) & (= np_2), \\ \mathbb{E}(n - X_1 - X_2) & (= nq), \\ \mathbb{V}(X_1) & (= np_1(1 - p_1)), \\ \mathbb{V}(X_2) & (= np_2(1 - p_2)), \\ \mathbb{V}(n - X_1 - X_2) & (= nq(1 - q)), \text{ y} \\ \text{Cov}(X_1, X_2) & (= -np_1p_2) \end{aligned}$$

### 3.4 Caminatas trinomiales y su aproximación normal

La distribución trinomial dada en la ecuación 18 tiene, por el teorema central del límite bidimensional, una aproximación normal bivariada. En el problema de las caminatas trinomiales nos interesa en realidad la variable aleatoria diferencia  $Z_1 - Z_2$ , donde la distribución conjunta de  $(Z_1, Z_2)$  es la trinomial  $n$ -ésima.

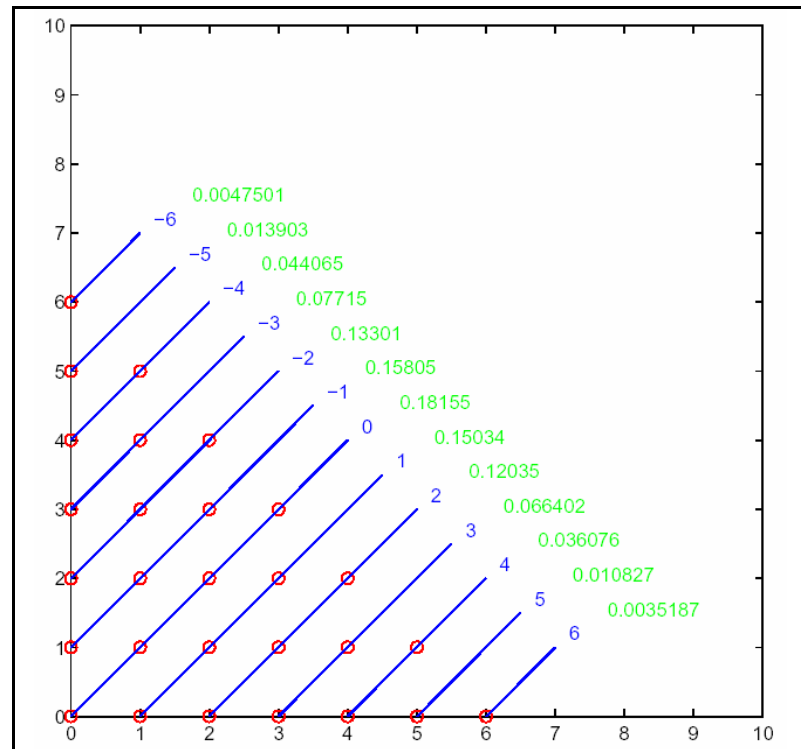
La densidad de  $Z_1 - Z_2$  se obtiene de la densidad conjunta mediante las expresiones siguientes

$$p_k^n = \begin{cases} \sum_{j=0}^{\frac{n-k}{2}} P\{Z_1 = k + j, Z_2 = j\} & \text{si } k \geq 0 \\ \sum_{j=0}^{\frac{n+k}{2}} P\{Z_1 = j + j, Z_2 = -k + j\} & \text{si } k < 0 \end{cases} \quad Ec 22$$

Los mismos resultados pueden obtenerse mediante la convolución de la densidad original.

En la figura 3 se representan los eventos de la densidad trinomial hasta  $n = 6$  y las probabilidades de la distribución de  $Z_1 - Z_2$  para  $n = 6$ .

**Figura 3**  
**Eventos de la densidad**  
**trinomial para  $n = 6$  y**  
**probabilidades acumuladas para las diagonales**  
**(0,41+,0,20=,0,39- )**



**3.4.1. Convolución de densidades de probabilidad.** Utilizamos la función `conv` de Matlab para calcular las densidades de la suma de  $n$  v.a.i.i.d.'s  $X_i$  con la densidad dada por las probabilidades. En este caso de distribución trinomial, la distribución completa está en 2D o en 3D (con una restricción) pues tiene dos grados de libertad. Sin embargo dadas las probabilidades trinomiales hay una v.a. 1D  $Y$  que toma los valores 1, 0, y -1, con probabilidades  $p_1$ ,  $q$ , y  $p_2$  y que es la que define la caminata trinomial. El valor que toma la suma  $\sum_{i=1}^n x_i$  corresponde a la variable aleatoria diferencia como hemos visto al principio de esta sección.

Para calcular la distribución de la suma se efectúa el número apropiado de convoluciones de la densidad original, y para calcular la probabilidad de un evento dado se suman las probabilidades de los eventos atómicos que lo componen. En el caso del problema se suman las probabilidades de los puntajes que superan o igualan el valor de corte de la valuación de la caminata resultante.

**3.4.2. Solución del problema utilizando Matlab.** Es posible generar un *script* de Matlab que calcula las convoluciones, obtiene la probabilidad buscada en el problema, permite obtener la media y varianza para la aplicación del teorema central del límite, y construye las representaciones gráficas ilustrativas, algunas de las cuales se han incluido en el presente trabajo.

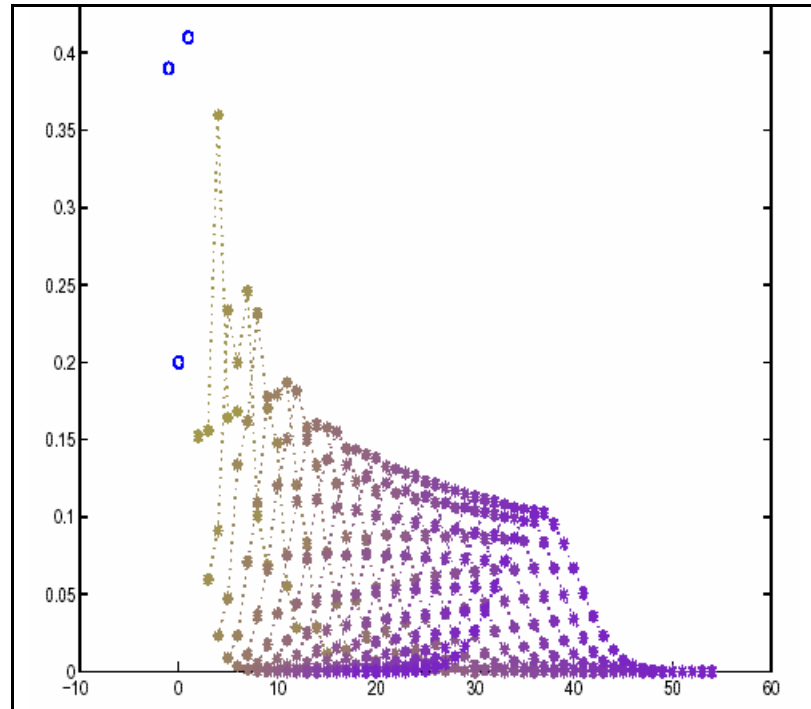
En este caso el valor de la probabilidad buscada es de 0,5589, es decir la probabilidad de que, después de 700 períodos, la acción esté arriba más de 10 respecto del precio de partida. La media es  $\mu = 14$  y la varianza es  $\sigma^2 = 559,72$  ( $\sigma = 23,6584$ ).

En la figura 4 se representan las densidades de las sumas de  $n$  variables con la distribución trinomial con probabilidades  $p_1 = 0,41$  de aumentar 1,  $q = 0,20$  de mantenerse igual y  $p_2 = 0,39$  de disminuir 1. Notar que las densidades están desplazadas para su visualización. En la figura 5 se representa la densidad de la suma de 700 variables con la distribución trinomial con probabilidades  $p_1 = 0,41$  de aumentar 1,  $q = 0,20$  de mantenerse igual y  $p_2 = 0,39$  de disminuir 1. La integral de la zona sombreada es la probabilidad buscada.



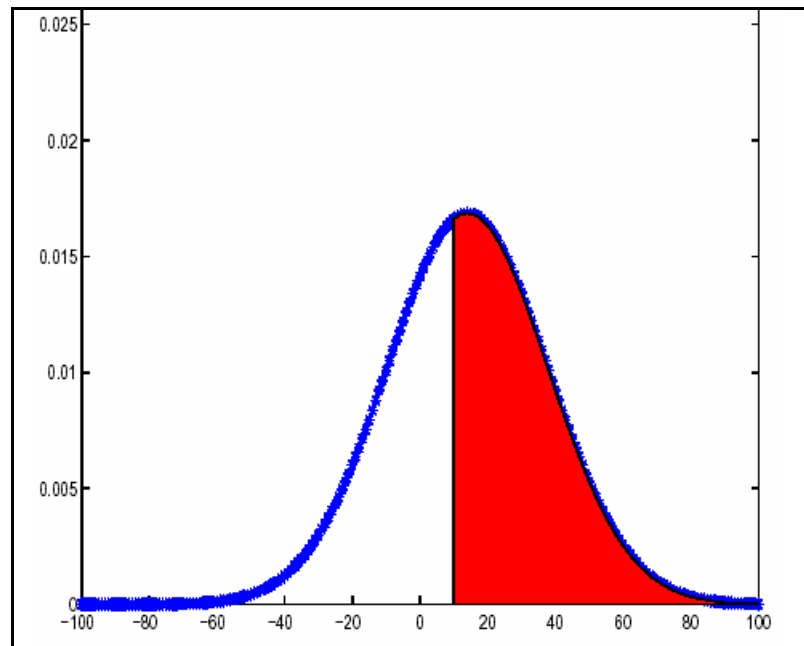
**Figura 4**  
**Densidades de las sumas**  
**de  $n$  variables con la dis-**  
**tribución trinomial**  
**(0,41+,0,20=,0,39- ).**

Notar que las densidades  
 están desplazadas para su  
 visualización.



**Figura 5**  
**Densidad de la suma de**  
**700 variables con la distri-**  
**bución trinomial.**

La integral de la zona som-  
 breada es la probabilidad  
 buscada.



**3.4.3. Consecuencia.** En este ejemplo se puede verificar que la aproximación es excelente. La probabilidad buscada puede hallarse indistintamente por los dos caminos: el discreto, que utiliza las densidades discretas de probabilidad, y el que utiliza la aproximación normal a cualquier suma de v.a.i.i.d.'s.

#### 4. EL MÉTODO TRINOMIAL

El método de árboles trinomiales es una mejora considerable de los instrumentos básicos que se utilizaron para desarrollar la teoría de la valuación de opciones –los árboles binomiales– que condujeron a las primeras versiones de la ecuación BSM y a las aproximaciones a sus soluciones.

Al pasar del conocido método binomial al trinomial:

- 1) Se mantienen las propiedades estadísticas de la distribución final a las que conducen teoremas como el teorema central del límite
- 2) Mejora considerablemente la calidad de la discretización de la caminata al azar predicha para el subyacente a partir del instante inicial de análisis
- 3) En consecuencia, se obtiene una mejor aproximación en la valuación deseada
- 4) Es más realista el conjunto de alternativas que puede tomar el precio del subyacente puesto que, además de representar los posibles aumento o disminución del mismo, admite que el precio se mantenga. Esto es independiente de la posible existencia de deriva no nula del precio que puede representarse en cualquiera de los sistemas de discretización
- 5) Es una algebrización del proceso continuo que equivale a la representación discreta de BSM mediante diferencias finitas adelantadas explícitas
- 6) Admite la aplicación de la teoría de errores *a posteriori* del análisis numérico a BSM

La necesidad de discretizar el problema –en este caso mediante árboles trinomiales– surge naturalmente de la ausencia, en general, de soluciones analíticas para el proceso de valuación del derivado en estudio. Esto es especialmente frecuente en el caso de los derivados exóticos dependientes del camino que, al agregar una o más dimensiones al problema, incrementan la complejidad computacional y, en general, alejan la posibilidad de hallar soluciones cerradas o formulables.

En el árbol trinomial, a partir de cada nodo hay tres posibilidades para el siguiente paso (subir, medio, descender) que admiten la existencia de derivada no nula para la evolución de los precios del subyacente.

Estimadas la derivada y la volatilidad de la caminata aleatoria para el precio del subyacente, existen muchas posibles determinaciones de los valores de estos factores de cambio ‘paso a paso’ y sus ‘probabilidades’ asociadas.<sup>2</sup>

Dado que el objetivo de nuestro trabajo es el mejoramiento de soluciones aproximadas y la estimación de errores, calculamos una de las versiones más simples para este conjunto de valores (en todos los casos se toman los valores de modo que valgan la media y el desvío estándar de los cambios de precio cuando se desprecian los términos de orden superior al paso de tiempo  $dt$ .)

Llamamos  $u$ ,  $m$  y  $d$  a los factores o coeficientes de suba, medio y baja del precio del subyacente en cada paso del árbol de discretización. Se debe mantener la condición de cierre del árbol (con el fin de evitar la multiplicación del número de nodos):

$$ud = m^2 \qquad \text{Ec 23}$$

Llamamos  $p_u$ ,  $p_m$  y  $p_d$  a las probabilidades de suba, medio o baja correspondientes. Estas variables deben satisfacer las siguientes ecuaciones de compatibilidad del primer y segundo momento de la evolución del subyacente

<sup>2</sup> En realidad, la teoría de valuación mediante técnicas de neutralidad al riesgo y no arbitraje (BSM), muestra que, esencialmente, no se trata de probabilidades de suba, mantenimiento, o descenso; pero como después estos valores se utilizan como si fuesen probabilidades para el cálculo de la esperanza de movimiento del precio desde cada nodo en cada paso, se las identifica desde el principio con verdaderas probabilidades.

$$p_u u + p_m m + p_d d = e^{rdt} \quad Ec 24$$

y

$$p_u u^2 + p_m m^2 + p_d d^2 - e^{2rdt} = e^{2rdt} (e^{s^2 dt} - 1) \quad Ec 25$$

Es decir,

$$p_u u^2 + p_m m^2 + p_d d^2 = e^{(2r+s^2)dt} \quad Ec 26$$

Para obtener una posible solución de este sistema suponemos

$$ud = m^2 = 1 \quad Ec 27$$

y

$$p_m = \frac{2}{3} \quad Ec 28$$

con lo que resulta el siguiente sistema de ecuaciones resoluble para las restantes variables:  $u$ ,  $p_u$  y  $p_d$ 

$$p_u u + \frac{2}{3} + p_d \frac{1}{u} = e^{rdt} \quad Ec 29$$

$$p_u u^2 + \frac{2}{3} + p_d \frac{1}{u^2} = e^{(2r+s^2)dt} \quad Ec 30$$

$$p_u + p_d = \frac{1}{3} \quad Ec 31$$

La solución del sistema puede expresarse como sigue. Las probabilidades son

$$p_d = \frac{5 - 3e^{2dt(2r+s^2)} + 3F - e^{dt(2r+s^2)}(-2+F) - 8e^{rdt}(2+F) + 6e^{2r+s^2}(2+F)}{6(5 - 16e^{rdt} + 12e^{2rdt} + 2e^{dt(2r+s^2)} + 3e^{2dt(2r+s^2)})} \quad Ec 32$$

$$p_u = \frac{5 - 3e^{2dt(2r+s^2)} - 3F - e^{dt(2r+s^2)}(2+F) + 8e^{rdt}(-2+F) - 6e^{2r+s^2}(-2+F)}{6(5 - 16e^{rdt} + 12e^{2rdt} + 2e^{dt(2r+s^2)} + 3e^{2dt(2r+s^2)})} \quad Ec 33$$

y el coeficiente de suba es

$$u = \frac{-1 + 3e^{dt(2r+s^2)} + F}{-4 + 6e^{rdt}} \quad Ec 34$$

donde la variable  $F$  toma el valor

$$F(dt) = \sqrt{-4(2 - 3e^{rdt})^2 + (1 - 3e^{dt(2r+s^2)})^2} \quad Ec 35$$

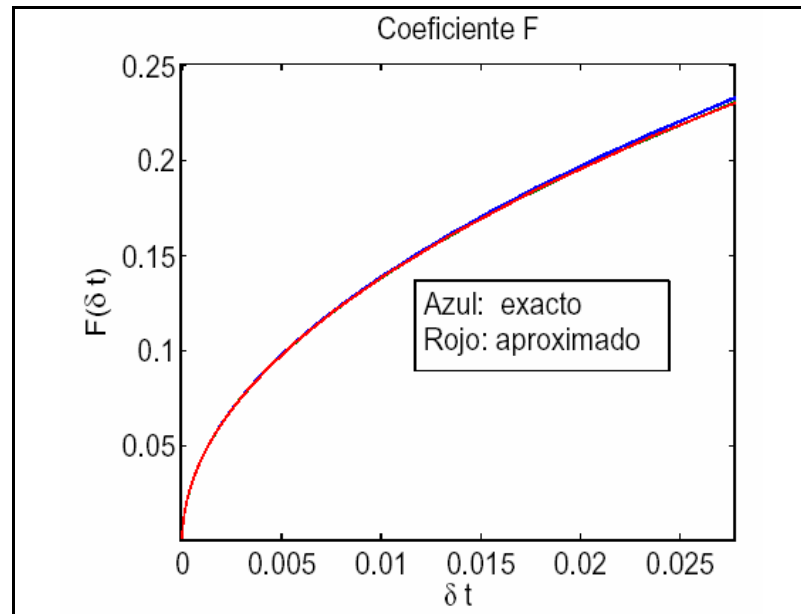
Nótese que en aproximación al nivel de despreciar los términos de orden superior a  $dt$  se tiene que

$$F(dt) \approx s \sqrt{12dt} \quad Ec 36$$

En la figura 6 representamos el valor de  $F(dt)$  en función de una gama amplia de valores del paso  $dt$  para la ecuación exacta (35) y su aproximación al nivel explicado, ecuación 36. Para esta representación se tomaron los valores de los parámetros siguientes:  $r = 0,10$  y  $s = 0,40$  (teniendo en cuenta los que corresponden al ejemplo de la sección 6.1). Para los valores

usuales del paso (que debe tender a cero) se observa un ajuste muy bueno, lo que confirma el cálculo aproximado que se ha expuesto.

**Figura 6**  
Comparación de los valores del coeficiente  $F$  para los valores de  $r=0,1$ ,  $s=0,4$   
Ver ecuaciones (35,36)



Con el mismo criterio precedente, en el caso de  $u$  se tiene el cociente aproximado

$$u \approx \frac{2 + s \sqrt{12dt} + 3(2r + s^2) dt}{2 + 6r dt} \quad \text{Ec 37}$$

de modo que

$$u \approx 1 + s \sqrt{3dt} + \frac{3}{2} s^2 dt \approx e^{s \sqrt{3dt}} \quad \text{Ec 38}$$

Realizando cálculos análogos, con la precisión establecida, se obtiene, en resumen, que el coeficiente de suba,  $u$ , resulta dado por

$$u = e^{s \sqrt{3dt} b dt} \quad \text{Ec 39}$$

con probabilidad de suba,  $p_u$ ,

$$p_u = \frac{1}{6} + \sqrt{\frac{dt}{12s^2}} \left( r - \frac{s^2}{2} \right) \quad \text{Ec 40}$$

Suponemos que el coeficiente de movimiento medio,  $m$ , es unitario ( $m = 1$ ), con probabilidad escogida

$$p_m = \frac{2}{3} \quad \text{Ec 41}$$

y el coeficiente de descenso,  $d$ , dado por

$$d = \frac{1}{u} = e^{-s \sqrt{3dt} b dt} \quad \text{Ec 42}$$

con probabilidad de descenso,  $p_d$ ,

$$p_d = \frac{1}{6} - \sqrt{\frac{dt}{12s^2}} \left( r - \frac{s^2}{2} \right) \quad \text{Ec 43}$$

donde  $s$  es la volatilidad del precio del subyacente,  $dt$  es el paso local del tiempo ( $ndt = T$ , el tiempo de vida de la opción,  $n$  el número de pasos),  $b_{dt}$  es un coeficiente de ajuste para la dispersión del árbol al tiempo final  $T$ , y  $r$  es la tasa de interés libre de riesgo.

El factor de corrección  $b_{dt}$  de la ecuación 39 tiene una doble utilidad: por un lado mejora el ajuste del árbol al movimiento browniano geométrico (cuando es necesario tomarlo distinto de la unidad) que modela la evolución del precio del subyacente y, por otro, se aplica en el ajuste de las mallas mixtas que explicaremos en la sección siguiente.

En la sección 6 ilustramos en primer término el algoritmo que considera todos los casos posibles de caminos en el árbol (y que, por ende, tiene complejidad computacional  $O(3^n)$ ) lo que configura su principal problema.

Para las opciones exóticas de una amplia clase entre las dependientes del camino, de las que las asiáticas que nos ocupan son un ejemplo, es posible elaborar un algoritmo con una complejidad computacional mucho menor utilizando solamente un conjunto fijo de valores por nodo (lo que puede llevarse al extremo de considerar solamente los valores máximo y mínimo, que, por supuesto, deben estar incluidos) e interpolar entre ellos.

De este modo es posible reducir el problema en una primera instancia al caso lineal respecto del número de nodos (que es de orden  $O(n^2)$ ). En la siguiente sección planteamos otras simplificaciones del algoritmo que permiten mejorar este problema de complejidad, las soluciones y estimar los errores del método. Para otros detalles del método trinomial como, por ejemplo, el hecho que coincide con el método de diferencias finitas explícitas para la BSM, sugerimos ver las referencias citadas.

Para los ejemplos, las suposiciones básicas (BSM) son

- tasa de interés  $r$  libre de riesgo
- valuación libre de riesgo
- acciones subyacentes que no generan dividendos en el período
- retrorecorrido del árbol en forma inductiva y selectiva
- para el caso de la versión americana de las opciones se verifica en cada nodo del subconjunto recorrido la posibilidad de ejercicio temprano.

#### 4.1. Cambio de probabilidades

En el caso que se suponga, en el caso totalmente análogo al desarrollo anterior, que la probabilidad de movimiento medio es  $p_m^* = 1/3$  en lugar del doble, las ecuaciones que se obtienen son: las probabilidades

$$p_d^* = \frac{1 - 3e^{2dt(2r+s^2)} - e^{dt(2r+s^2)}(2+G) - 2e^{rdt}(4+G) + 3e^{2r+s^2}(4+G)}{3 - 24e^{rdt} + 36e^{2rdt} - 6e^{dt(2r+s^2)} - 9e^{2dt(2r+s^2)}} \quad Ec 44$$

$$p_u^* = \frac{1 - 3e^{2dt(2r+s^2)} + e^{dt(2r+s^2)}(-2+G) + 2e^{rdt}(-4+G) - 3e^{2r+s^2}(-4+G)}{3 - 24e^{rdt} + 36e^{2rdt} - 6e^{dt(2r+s^2)} - 9e^{2dt(2r+s^2)}} \quad Ec 45$$

y el coeficiente de suba

$$u^* = \frac{1 + 3e^{dt(2r+s^2)} + G}{-2 + 6e^{rdt}} \quad Ec 46$$

donde la variable  $G$  toma el valor

$$G(dt) = \sqrt{-4(1 - 3e^{rdt})^2 + (1 + 3e^{dt(2r+s^2)})^2} \quad Ec 47$$

$d = \frac{1}{u^*}$ ,  $m^{*2} = u^* d^* = 1$  y  $\mathbf{G}(dt)$  tiene una forma y propiedades similares a su análoga  $\mathbf{F}(dt)$ .

Las probabilidades  $p_u^*$  y  $p_d^*$  ahora son del orden de  $1/3$ .

Una deducción similar a la realizada para la primera versión conduce a las expresiones aproximadas que son útiles para la construcción del árbol trinomial en este caso, sin embargo, eligiendo todo igual pero  $p_m^{**} = 1/2$  se obtiene –resolviendo el sistema análogo al dado por las ecuaciones (29-31) con las modificaciones que corresponden en las constantes– un nuevo conjunto de valores de los parámetros que aplicamos en el ejemplo 6.2. Estos son:

$$u^{**} = \frac{3e^{dt(2r+s^2)} + H}{-2 + 4e^{rdt}} \quad \text{Ec 48}$$

con las probabilidades

$$p_d^{**} = \frac{2 - 2e^{2dt(2r+s^2)} + H - e^{dt(2r+s^2)} H - 4e^{rdt}(2+H) + 4e^{2rdt}(2+H)}{8(1 - 4e^{rdt} + 4e^{2rdt} - e^{2dt(2r+s^2)})} \quad \text{Ec 49}$$

y

$$p_u^{**} = \frac{2 - 2e^{2dt(2r+s^2)} - H + e^{dt(2r+s^2)} H + 4e^{rdt}(-2+H) - 4e^{2rdt}(-2+H)}{8(1 - 4e^{rdt} + 4e^{2rdt} - e^{2dt(2r+s^2)})} \quad \text{Ec 50}$$

donde

$$H(dt) = \sqrt{4e^{2dt(2r+s^2)} - 4(1 - 2e^{rdt})^2} \quad \text{Ec 51}$$

realizando simplificaciones análogas a las ya explicadas se obtiene

$$H(dt) \approx s\sqrt{8dt} \quad \text{Ec 52}$$

de modo que

$$u^{**} \approx \frac{1 + s\sqrt{2dt} + (2r + s^2)dt}{1 + 2rdt} \quad \text{Ec 53}$$

es decir

$$u^{**} \approx 1 + s\sqrt{2dt} + \frac{2s^2 dt}{2} \approx e^{s\sqrt{2dt}} \quad \text{Ec 54}$$

Análogamente

$$p_u^{**} = \frac{1}{4} + \sqrt{\frac{dt}{8s^2}} \left( r - \frac{s^2}{2} \right) \quad \text{Ec 55}$$

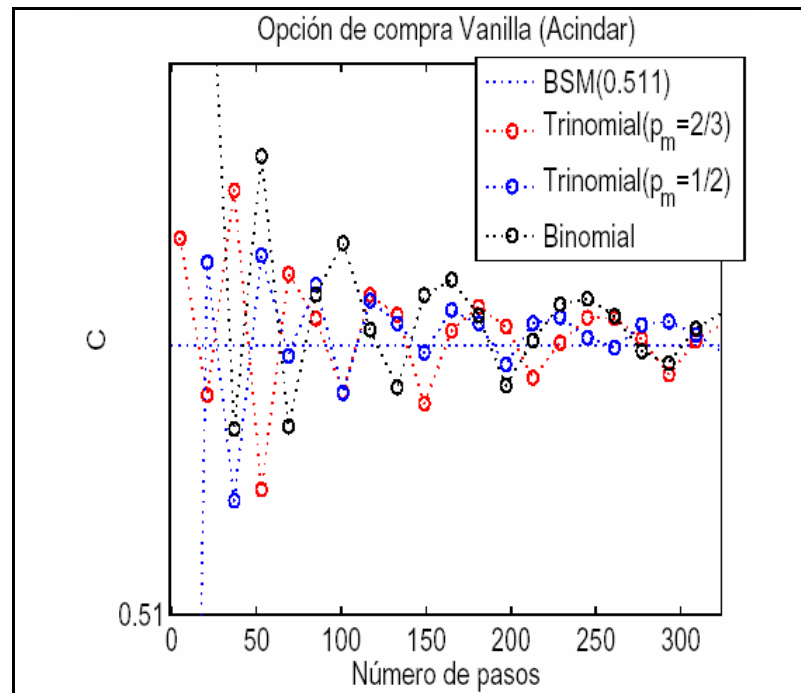
y

$$p_d^{**} = \frac{1}{4} - \sqrt{\frac{dt}{8s^2}} \left( r - \frac{s^2}{2} \right) \quad \text{Ec 56}$$

## 4.2. Comparación de métodos

En la figura 7 se comparan los métodos trinomiales precedentemente deducidos para el caso de los datos de la opción de acciones de Acindar (pero ahora considerada como una opción de compra vanilla, o clásica, con el fin de tener un valor exacto de la solución, dado por BSM, para poder realizar la comparación, se trata luego en el ejemplo 2, ver sección 6.2). Asimismo se incluye el resultado de BSM y el de realizar el cálculo utilizando el método clásico binomial.

**Figura 7**  
*Comparación entre los métodos trinomiales y el método binomial para el caso del ejemplo 2 (ver sección 6.2)*



Se advierte claramente que cualquiera de los dos trinomiales supera al binomial en cuanto a la calidad de la aproximación, en todo el rango de pasos representados y que todos ellos, cuando se supera un número pequeño de pasos, aproximan correctamente dentro del error de estos métodos que calculamos en la sección de ejemplos para el caso de las opciones Asiáticas (cabe suponer que el error en este caso Vanilla sea menor, pero aun así las aproximaciones son muy buenas). Es más difícil dar una respuesta a la pregunta de cuál de los dos trinomiales representados supera al otro. En este caso parece ser mejor el que corresponde a la probabilidad  $p_m^{**} = 1/2$  respecto del que corresponde a la elección de la probabilidad  $p_m = 2/3$ , pero queda todavía terreno para investigar al respecto.

## 5. EXTRAPOLACIÓN, ESTIMACIÓN DE ERRORES, MEJORAMIENTO DE LA SOLUCIÓN Y EL MÉTODO DE MALLAS MIXTAS

En los artículos Bergallo et al. (2000a) y Bergallo et al. (2000b) damos los detalles del método de mallas mixtas para la estimación de errores (*a posteriori*) y el mejoramiento de la solución que produce el método trinomial. Esta teoría se puede aplicar aquí debido a que el árbol trinomial es en realidad parte de la malla de diferencias finitas explícitas de la ecuación BSM correspondiente. Un factor de ventaja adicional es que el método puede aplicarse aun en el caso en que no se tienen condiciones de formulación o de frontera e iniciales totalmente correctas en la BSM, permitiendo obtener resultados aproximados en los casos en que no se cuenta con los exactos (que es justamente el caso del trabajo que nos ocupa).

### 5.1. Extrapolación

La extrapolación de los resultados (denominada en Análisis Numérico ‘de Richardson’) consiste en utilizar las expansiones del error asintótico –asociado a la magnitud calculada– para distintos pasos  $h$  (que en nuestro caso los denominamos  $dt$ ). Generalmente estos son  $2h$  y  $h$ . Se utilizan los resultados para obtener un ‘extrapolado a paso cero’ en función del orden del método en cuestión. En nuestro caso el orden resulta ser dos (i.e.  $O(h^2)$ ) puesto que el árbol trinomial es un subconjunto de la malla de diferencias finitas explícitas correspondiente a la ecuación BSM. Es interesante notar que, si se desea utilizar un método de diferencias finitas (parcialmente) implícitas debe aplicarse un árbol multinomial que abarque todos los nodos de cada paso, lo que, en general, resulta impráctico.

Este método podría ser utilizado, pero la base del concepto de mallas mixtas o mallas mezcla en su faceta de mejoramiento de la solución es superior en varios aspectos como ha sido ya expuesto en las referencias citadas.

### 5.2. Mallas mixtas

La idea de mezclar mallas proviene del Análisis Numérico de problemas ingenieriles en los que se presentan mezclas de sustancias con distintas propiedades físicas y químicas. En nuestro caso, para abreviar, una vez calculada la malla base, se construye una nueva malla con la mitad de pasos y la mitad de niveles de interpolación (esto último es opcional, y, por supuesto, no se aplica cuando estos niveles son 2). Se extrae de la malla base, que llamamos *malla fina*, el conjunto de valores que superpone exactamente con los de la malla mitad, llamada *malla gruesa*, y con los dos conjuntos de valores se realiza una mezcla con pesos que, dependiendo de cómo se elijan, permiten obtener soluciones mejoradas o, alternativamente, estimar los errores de aproximación mediante el cálculo de diferencias o *residuos*. Para los detalles de la implementación referimos al lector a las referencias específicas citadas, de autoría propia.

### 5.3. Estimación de errores

El proceso realizado con las mallas fina y gruesa con el objetivo de estimar los errores es mezclarlas con pesos iguales y realizar el retrorrecorrido del árbol resultante. El resultado de este proceso es comparado con el resultado obtenido de la extracción explicada de la malla fina y de la diferencia se obtienen los residuos que permiten estimar los errores asociados a las magnitudes calculadas.

### 5.4. Mejoramiento de la solución

Para el mejoramiento de la solución mediante las mallas mezcla es necesario escoger los pesos de la mezcla en función del orden del método subyacente (en nuestro caso es 2). De este modo los pesos utilizados en este trabajo son  $4/3$  para la malla extraída de la malla fina y  $-1/3$  para la malla gruesa. Con ellos se obtienen los resultados que detallamos y explicamos en la sección siguiente.

## 6. RESULTADOS

Presentaremos dos ejemplos de aplicación de los métodos expuestos, el primero de ellos para comparar con la literatura clásica en el tema y el segundo para realizar una aplicación al caso de una opción local



### 6.1. Ejemplo 1: Comparación con resultados de las referencias específicas

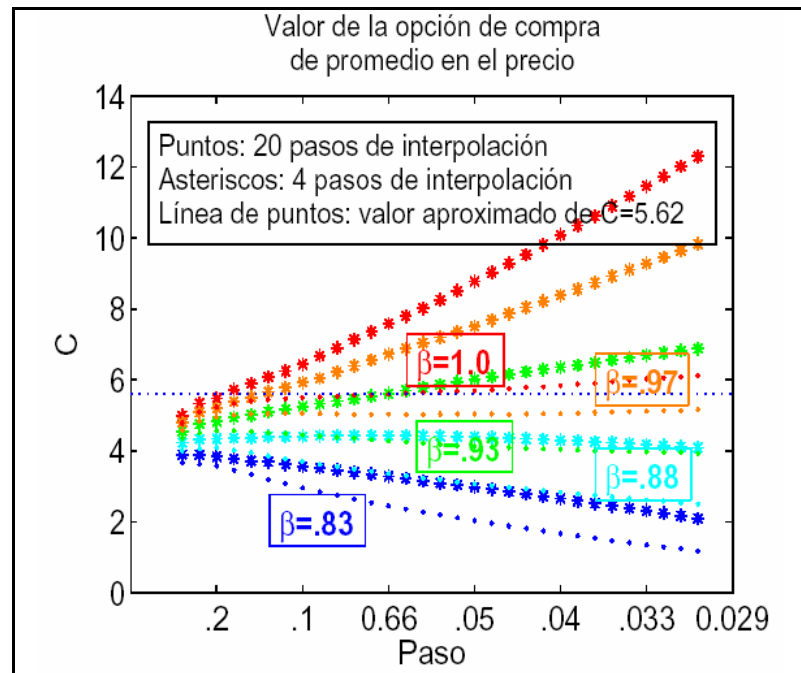
En la figura 8 se representan los resultados de calcular con el algoritmo simplificado el valor de la opción de compra de promedio (aritmético) en el precio, para distintos pasos, 4 ó 20 niveles de interpolación y los valores de  $S_0 = 50$ ,  $K = 50$ ,  $T = 1$ ,  $r = 0,1$ ,  $s = 0,4$  (ver ecuación 10 que produce el valor aproximado del valor de la opción).

**Figura 8**  
**Cálculo del valor de la opción de compra de promedio (aritmético) en el precio para distintos pasos, 4 ó 20 niveles de interpolación y los valores de  $r=0,1$ ,  $s=0,4$ .**

Ver ecuación 10 y secciones 2 a 5.

El valor de  $b = 1/\sqrt{b_{dt}}$ ,

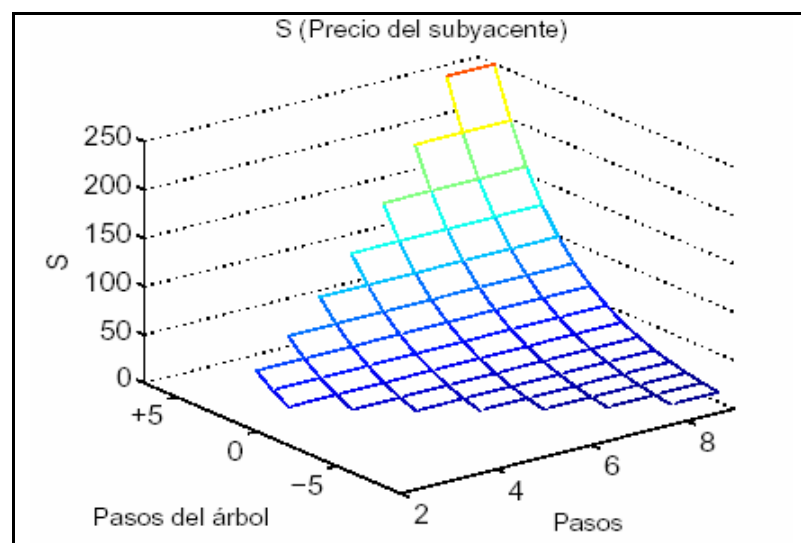
donde se expresa solamente el radicando del denominador, es un factor de corrección para los coeficientes de suba,  $u$ , o baja,  $d$ , del subyacente.



Para estos parámetros se representa en la figura 9 el árbol trinomial del valor del subyacente para un número pequeño de pasos con el objetivo de no hacer muy densa la figura. En este conjunto de ejemplos se aplican los desarrollos de las secciones 2 a 5. El valor de  $b = 1/\sqrt{b_{dt}}$  (que se representa en la figura 8, donde se expresa solamente el radicando del denominador) es un factor de corrección para los coeficientes de suba,  $u$ , o baja,  $d$ , del subyacente.

**Figura 9**  
**Precio  $S$  del subyacente en el árbol trinomial.**

El precio inicial es  $S_0 = 50$  y el valor de ejercicio es  $K = 50$ .



Con 20 pasos y 20 niveles de interpolación se obtiene  $C_{(20,20)} = 5,0390$  y con 40 pasos y los mismos niveles de interpolación se obtiene  $C_{(40,20)} = 5,3135$ . Si realizamos la extrapolación

$$\frac{4}{3} 5,3135 - \frac{1}{3} 5,0390 = 5,41 \quad \text{Ec 57}$$

que resulta muy similar al obtenido mediante otras suposiciones aproximadas ( $C = 5,62$ ) y por lo tanto una buena estimación del valor de la opción estudiada.

Cuando se realiza el cálculo con 130 pasos (lo que corresponde a un paso de tiempo de  $dt \approx 0,0077$ ), 40 promedios y un coeficiente  $1/\sqrt{0,97}$  se obtiene un valor de  $C_{(130,40)} = 5,6145$  que coincide prácticamente con el calculado por nosotros mediante la ecuación 10 que resulta ser de  $C = 5,6168$ .

El valor, si no se tiene en cuenta el factor de corrección  $1/\sqrt{0,97}$ , difiere mucho más del aproximado. Esto justifica calibrar heurísticamente el árbol trinomial con el objeto de obtener resultados más ajustados.

Podemos aceptar, en consecuencia, que nuestros resultados son similares a los de las referencias específicas.

Aplicando los métodos de mallas mixtas se obtiene en este caso  $C = 5,86$  con un error estimado del orden de 3%.

## 6.2. Ejemplo 2: Aplicación al caso de una opción local

El ejemplo elegido para ilustrar esta sección corresponde a los valores del 28 de junio de 2006 de la acción de Acindar<sup>3</sup>

- $S_0 = 4,40$ , valor inicial (correspondiente al día anterior, del subyacente)
- $K = 4,00$ , valor de ejercicio de la opción de compra (que después valuaremos como asiática del tipo de precio promedio (*average price call*))
- $r = 0,0852$ , tasa anual de interés libre de riesgo compuesta continua
- $T = 1,5/12 = 0,125$ , tiempo total de evaluación ( $T = 1$  corresponde a un año)
- $\sigma = 0,38$ , volatilidad anual del subyacente
- $C = 0,525$ , valor teórico de la opción de compra clásica (*Vanilla call*) asociada a este problema (que incluimos simplemente con fines ilustrativos, el valor obtenido por nosotros (BSM) es  $c = 0,511$ )
- $C(27/JUN/2006) = 0,440$ , cotización del *Vanilla call*
- $C(26/JUN/2006) = 0,540$ , idem anterior.

Vamos a presentar los resultados obtenidos mediante dos mallas trinomiales obtenidas con dos juegos de probabilidades distintos, según se explica en la sección 4.1. En primer término los valores de probabilidades provenientes de la literatura correspondientes a la elección  $p_m = 2/3$  y en segundo lugar los correspondientes a la elección  $p_m^{**} = 1/2$  deducidos en este trabajo.

En la figura 10 representamos el árbol trinomial de precios correspondientes al subyacente descripto. Aquí trabajamos con 40 pasos y 41 promedios en cada nodo, con lo que en la malla original se tiene

- $u = 1,0218$ ,  $p_u = 0,1672$ , el coeficiente y probabilidad de suba
- $m = 1$ ,  $p_m = 0,6667$ , idem medio
- $d = 0,9787$ ,  $p_d = 0,1661$ , idem baja
- $C = 0,4058$ , valuación calculada de la opción (europea)
- $C = 0,4613$ , valuación calculada de la opción (americana)

Y, para la malla con 20 pasos y 21 promedios por nodo (malla mitad),

- $u = 1,0375$ ,  $p_u = 0,1674$ , suba

<sup>3</sup> Ver, para otros detalles de esta acción de Acindar, la referencia Neuman y Zanor (2005).

$m = 1, p_m = 0,6667$ , medio

$d = 0,9639, p_d = 0,1659$ , baja

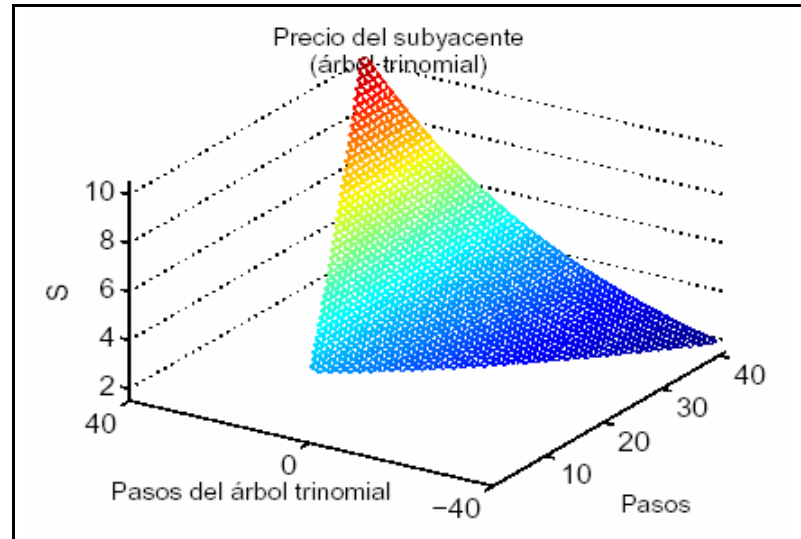
$C = 0,4117$  valuación calculada de la opción (europea) con la malla gruesa

En todos los casos el valor del coeficiente de ajuste es  $\frac{1}{b_{dt}}$ , con  $b_{dt} = 0,97$ .

**Figura 10**

**Precio  $S$  del subyacente en el árbol trinomial.**

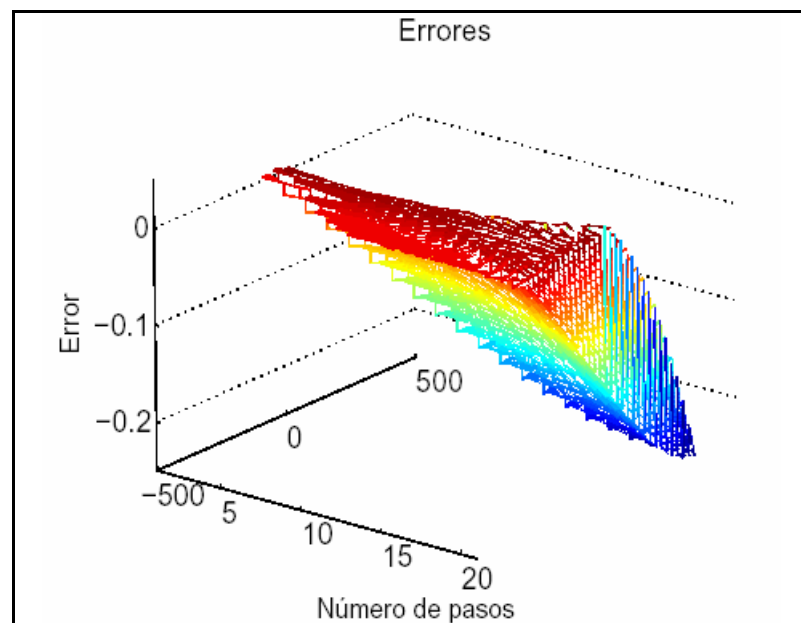
El precio inicial es  $S_0 = 4,40$  y el valor de ejercicio es  $K = 4,00$



En la figura 11 se representan los errores en el valor de la opción obtenidos mediante el método de doble malla o malla mixta descrito en la sección 5.3. El valor que interesa es el correspondiente al vértice del árbol, los restantes errores representados solamente se incluyen para formar una idea de cual es el resultado del cálculo de errores en toda la malla. Cabe destacar que los valores donde los errores son más altos en valor absoluto están asociados, en general, con promedios de muy baja probabilidad (ver figuras 1 y 2).

**Figura 11**

**Errores en el valor de la opción obtenidos mediante el método de doble malla o malla mixta, descrito en la sección 5.3**



El valor que nos interesa en particular es el precio de la opción: en primer lugar está el valor  $C = 0,461$  calculado con la malla fina y la estimación del error correspondiente que resulta ser  $|E| = 0,03$ . Cuando calculamos el valor de la misma opción utilizando el método de mejoramiento de la solución descrito en la sección 5.4 se obtiene  $C = 0,478$ , que podemos adoptar como el mejor valor conseguible con este método en el que la probabilidad de movimiento al medio es

$p_m = 2/3$  (más abajo consideramos valores diferentes obtenidos con otro juego de probabilidades). El valor que produce la aproximación, calculado mediante la ecuación 10 es  $C = 0,434$ , que también se halla en el intervalo de confianza provisto por el método para esta versión de la discretización.

6.2.1. *Cálculo con el conjunto de probabilidades alternativas.* En la figura 12 representamos el árbol trinomial de precios correspondientes al subyacente descrito, aquí también trabajamos con 40 pasos y 41 promedios en cada nodo con lo que en la malla original se tiene

$u^{**} = 1,0149$ ,  $p_u^{**} = 0,2507$ , el coeficiente y probabilidad de suba

$m^{**} = 1$ ,  $p_m^{**} = 0,5$ , idem medio

$d^{**} = 0,9853$ ,  $p_d^{**} = 0,2493$ , idem baja

y, para la malla con 20 pasos y 21 promedios por nodo (malla mitad)

$u^{**} = 1,0276$ ,  $p_u^{**} = 0,251$ , suba

$m^{**} = 1$ ,  $p_m^{**} = 0,5$ , medio

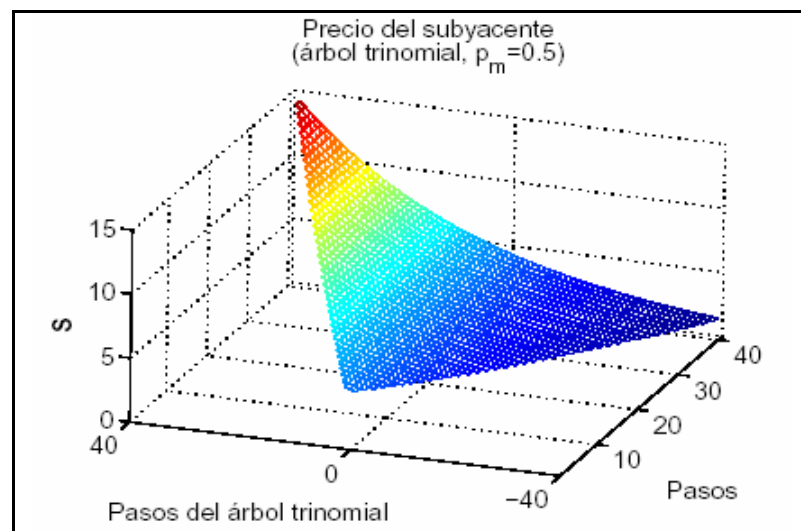
$d^{**} = 0,9731$ ,  $p_d^{**} = 0,249$ , baja

$C = 0,40798$ , valuación calculada de la opción (europea) con la malla gruesa.

En todos los casos el valor del coeficiente de ajuste es  $\frac{1}{b_{dt}}$ , con  $b_{dt} = 0,97$

**Figura 12**  
**Precio  $S$  del subyacente en el árbol trinomial.**

El precio inicial es  $S_0 = 4,40$  y el valor de ejercicio es  $K = 4,00$ . Aquí la probabilidad de movimiento medio es  $p_m^{**} = 1$  (comparar con la figura 10)



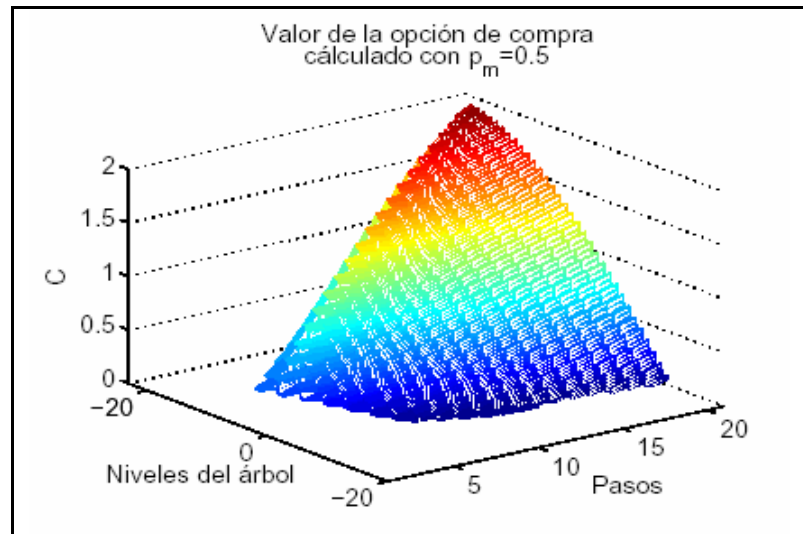
En este caso el valor de la opción mejorado por el método es de  $C = 0,401$  y el error provisto por el método es el mismo que antes  $|E| = 0,03\$$ , mientras que el valor dado por la malla fina es de  $C = 0,4026$ . Con este juego nuevo de probabilidades basado en la elección  $p_m^{**} = 1/2$  se obtiene un valor más conservador para el precio de la opción que coloca al analista en una posición más segura.

Este segundo juego de coeficientes y probabilidades es superior al anterior puesto que es más conservador y produce resultados favorables al posible comprador de la opción (consecuentemente desfavorables para el emisor de la misma).

En la figura 13 se representa todo el árbol de valores de la opción de compra americana de precio promedio calculada con el método de mejoramiento de la solución. El objetivo de incluirla es meramente informativo, puesto que en este caso el valor que interesa es el precio del vértice del árbol establecido más arriba.

**Figura 13**  
**Precio  $C$  de la opción de compra de promedio en el precio correspondiente a estos datos para todo el árbol, calculada con el método de mejoramiento de la solución.**

El precio inicial del subyacente es  $S_0 = 4,40$  y el valor de ejercicio es  $K = 4,00$ .

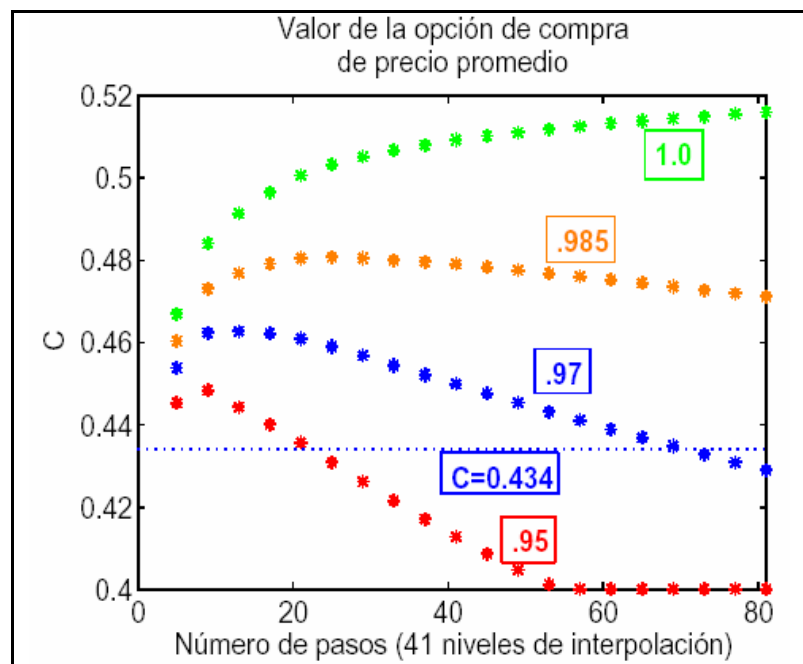


Por último, en la figura 14 se representan las curvas de precio  $C$  de la opción de compra de promedio en el precio, correspondiente a estos datos, para distinta cantidad de pasos, 41 niveles de interpolación y distintos coeficientes de ajuste (ver figura 8). En la figura se incluye, en línea de puntos, el valor calculado mediante la ecuación 10: i.e.  $C = 0,434$  como referencia para los restantes valores.

**Figura 14**  
**Precio  $C$  de la opción de compra de promedio en el precio, correspondiente a estos datos, para distinta cantidad de pasos, 41 niveles de interpolación y distintos coeficientes de ajuste**

(Ver figura 8, en esta figura se expresa solamente el valor asociado a cada curva de puntos).

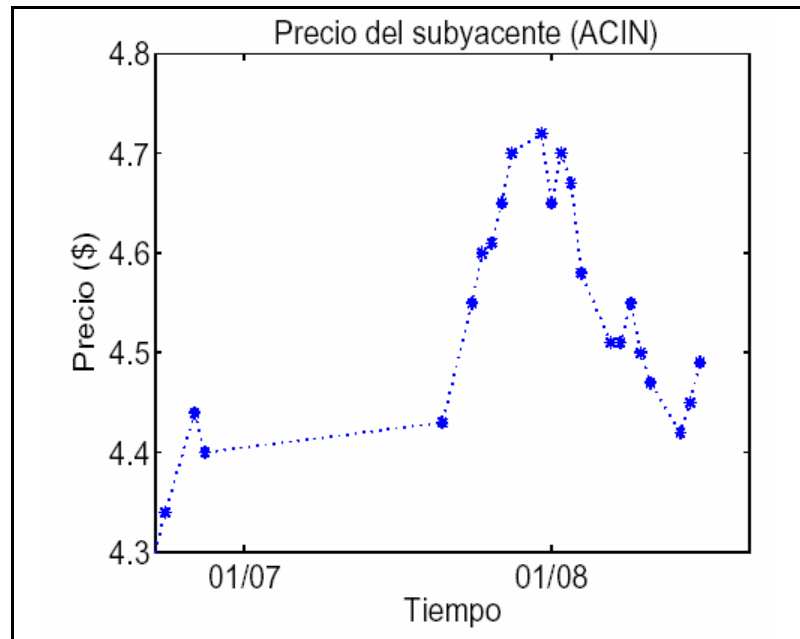
El valor  $C = 0,434$ , nivel de la línea horizontal de puntos azules representa el precio de la opción de compra calculado mediante la ecuación 10.



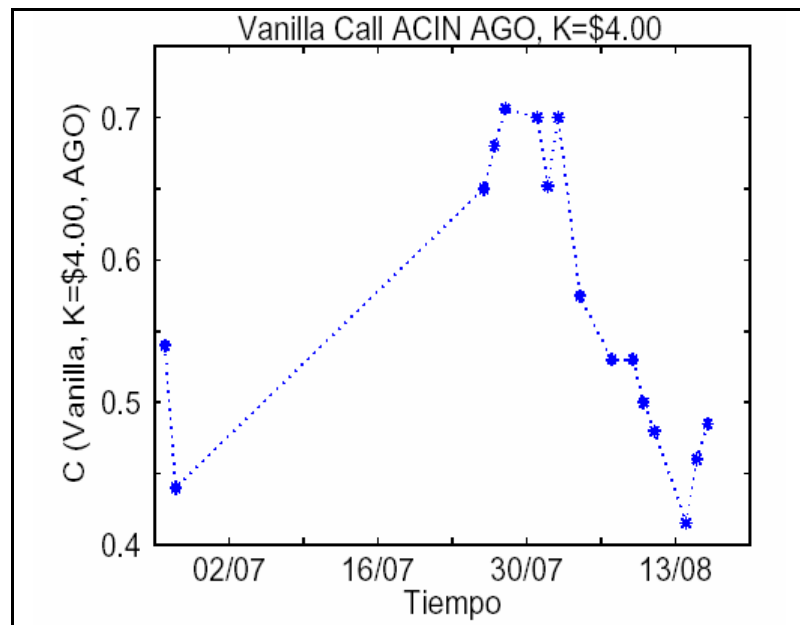
**6.2.2. El análisis a posteriori con el valor conocido del subyacente.** En las figuras 15 y 16 se representan los precios de la acción ACIN subyacente de los derivados Vanilla y asiáticos de este ejemplo en primer término y  $C$  del Call Vanilla correspondiente a la acción ACIN subyacente de la figura 15, con vencimiento el 18 de agosto de 2006 y  $K = 4,00$  en segundo.

El objetivo de estas ilustraciones es mostrar la verdadera evolución del valor del Vanilla Call y de  $S$  que fueron estimados y simulados en la primera parte del ejemplo y ver en que zona del árbol trinomial uno se encuentra cuando ya se ha recorrido un lapso sustancial de tiempo y el tiempo final de ejercicio se acerca. Comparar estos valores con los de la figura 12.

**Figura 15**  
**Precio  $S$  de la acción**  
**ACIN subyacente de los**  
**derivados Vanilla y asiáticos**  
**de este ejemplo.**



**Figura 16**  
**Precio  $C$  del Call Vanilla**  
**correspondiente a la ac-**  
**ción ACIN subyacente de**  
**la figura 14, con venci-**  
**miento el 18 de agosto de**  
**2006 y  $K = 4,00$ .**



El ejemplo elegido para ilustrar esta sección corresponde a los valores del 01 de agosto de 2006 de la acción de Acindar

$S_0 = 4,65$ , valor inicial (correspondiente al día anterior, del subyacente)

$K = 4,00$ , valor de ejercicio de la opción de compra, que después valuaremos como asiática del tipo de precio promedio (*average price call*)

$r = 0,095$ , tasa anual de interés libre de riesgo compuesta continua

$T = 18/365 = 0,04932$ , tiempo total de evaluación ( $T = 1$  corresponde a un año)

$\sigma = 0,21$ , volatilidad anual del subyacente

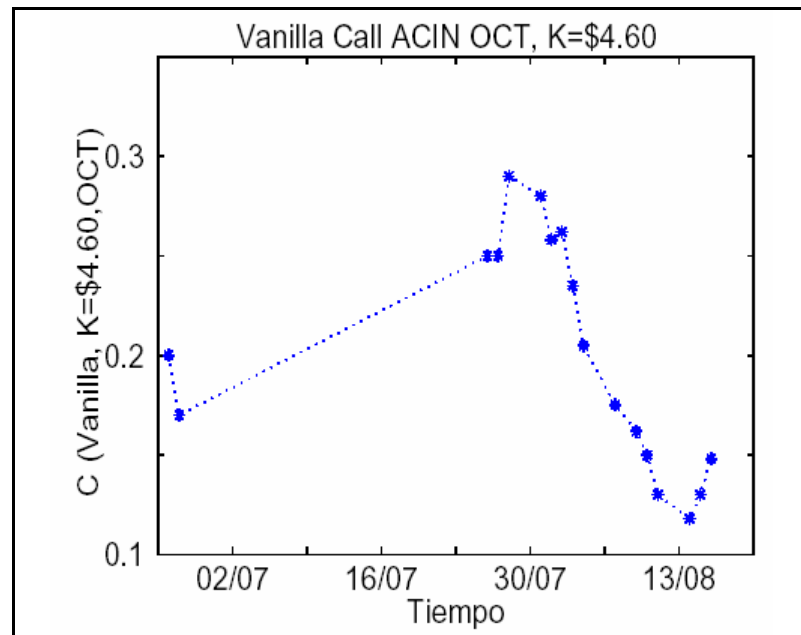
$C = 0,6687$ , valor teórico de la opción de compra clásica (*Vanilla call*) asociada a este problema (que incluimos simplemente con fines ilustrativos, el valor obtenido por nosotros (BSM, trinomial, 201 pasos) es  $c = 0,6719$ )

$C(01/AGO/2006) = 0,652$ , cotización del *Vanilla call*.

### 6.3. Ejemplo 3: Aplicación al caso de otra opción local similar con diferente *strike time*

En las figuras 15 y 17 se representan los precios de la acción ACIN subyacente de los derivados Vanilla y asiáticos del ejemplo previo en primer término y  $C$  del Call Vanilla correspondiente a la acción ACIN subyacente de la figura 14, con vencimiento el 20 de octubre de 2006 y  $K = 4,60$  en segundo. El objetivo de estas ilustraciones es tener un nuevo ejemplo para explorar la calidad de las estimaciones que realiza el programa que hemos desarrollado.

**Figura 17**  
**Precio  $C$  del Call Vanilla correspondiente a la acción ACIN subyacente de la figura 15, con vencimiento el 20 de octubre de 2006 y  $K = 4,60$ .**



El ejemplo elegido para ilustrar esta sección corresponde a los valores del 28 de junio de 2006 de la acción de Acindar

$S_0 = 4,40$ , valor inicial (correspondiente al día anterior, del subyacente)

$K = 4,00$ , valor de ejercicio de la opción de compra, que después valuaremos como asiática del tipo de precio promedio (*average price call*)

$r = 0,0852$ , tasa anual de interés libre de riesgo compuesta continua

$T = 1,5/12 = 0,125$ , tiempo total de evaluación ( $T = 1$  corresponde a un año)

$\sigma = 0,38$ , volatilidad anual del subyacente

$C = 0,525$ \$, valor teórico de la opción de compra clásica (*Vanilla call*) asociada a este problema (que incluimos simplemente con fines ilustrativos, el valor obtenido por nosotros (BSM) es  $c = 0,511$ )

$C(27/JUN/2006) = 0,440$ , cotización del *Vanilla call*

$C(26/JUN/2006) = 0,540$ , idem anterior.

## 8. CONCLUSIONES

Los principales resultados de este trabajo son

- 1) Haber logrado calcular en forma eficiente el valor de un derivado exótico dependiente del camino, como ejemplo de una clase muy amplia de ellos –en este caso las opciones asiáticas, europeas y, sobre todo, americanas–, verificando, ampliando y modificando las ecuaciones provenientes de la literatura en el tema y diseñando algoritmos simples y de muy veloz desarrollo para su cálculo, y
- 2) haber, también, adaptado un método desarrollado por el autor asociado con sus colegas Marta Bergallo y Victorio Sonzogni (ver Bergallo et al. (2000a,b, 2006) para la estimación de errores *a posteriori* y el mejoramiento de las soluciones basados en lo que denominamos oportunamente mallas mezcla o mallas mixtas, que tiene la propiedad de lograr el objetivo buscado sin incrementar la complejidad computacional del proceso de obtención de los resultados,
- 3) y que permite dar una solución y estimación del error de aproximación que es útil para el Ingeniero Financiero, y le facilita tomar una posición ventajosa en la negociación de estos derivados exóticos dependientes del camino, que se transan habitualmente fuera de los mercados mediante grandes contratos particulares entre instituciones financieras de gran envergadura.

El método trinomial adaptado aplicado en el presente trabajo supera los métodos habituales de valuación discreta pese que aquí solamente se lo ha optimizado hasta el orden de complejidad  $O(n^2)$  (proporcional al cuadrado de la cantidad  $n$  de nodos), que, de cualquier modo, se calcula en forma prácticamente instantánea en una PC relativamente nueva estándar (cuando el *script* de Matlab está vectorizado correctamente).

Se trata de un método sin duda superior al popular método de Montecarlo.

El algoritmo desarrollado facilita el muestreo discreto –lo que como se sabe es muy popular por el abaratamiento del producto que implica– del estimador dependiente del camino del cual se trate, en este caso la media aritmética.

La forma de desarrollo del algoritmo en Matlab hace que sea fácilmente paralelizable.

Asimismo admite una mejora sustancial (que no se implementa en este trabajo puesto que su objetivo es otro): si se tienen en cuenta de modo apropiado solamente los nodos de alta probabilidad es posible reducir el orden de complejidad a casi lineal en el número de nodos ( $O(n \log(n))$ ). Esta faceta de programación está en un grado avanzado de desarrollo en lo que respecta al diseño de un algoritmo eficiente y robusto.

Cabe destacar, en resumen, que hemos satisfecho las condiciones establecidas como requisitos en la introducción de este artículo.

## REFERENCIAS

- M. B. Bergallo, C. E. Neuman, y V. E. Sonzogni, Composite mesh concept based fem error estimation and solution improvement, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 188:755–774, 2000a.
- M. B. Bergallo, C. E. Neuman, y V. E. Sonzogni, Composite mesh fem for parabolic evolution problems, *Proceedings of ECCOMAS2000, European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering*, Barcelona, España, Paper 622, 1:1–20, 2000b.
- M. B. Bergallo, C. E. Neuman, y V. E. Sonzogni, Errores ‘a posteriori’ y mejoramiento de la valuación de opciones financieras dependientes del camino. *Proceedings of ENIEF2006, XV Congreso sobre Métodos Numéricos y sus Aplicaciones*, Santa Fe, Argentina, 1:1–19, 2006.



- E. M. Candiotti, *Administración Financiera (Sus Esencias) A Base de Recetas Caseras (La Sencillez es la Cortesía del Pensamiento)*. Editorial Universidad Adventista del Plata, Entre Ríos, 9ª Ed, 2004
- W. Feller, *Introducción a la teoría de probabilidades y sus aplicaciones*, Vol I, Limusa-Wiley, México, 1973.
- J. C. Hull, *Options, Futures and Other Derivatives*, Prentice Hall, 4<sup>th</sup> Ed, 1999.
- C. E. Neuman y M. Zanor, *Tópicos en la valuación de derivados dependientes del camino*, en Legnani, W., Jacovkis, P. y Armentano, R. (eds), *Modelización aplicada a la ingeniería*, pág 261–283. FRBA, Universidad Tecnológica Nacional, Buenos Aires, 2005.

### AGRADECIMIENTO

El autor agradece profundamente la colaboración permanente y en una serie de trabajos preliminares y motivadores del presente –en varias direcciones– de los amigos y colegas Maître en Sciences Mathématiques (Master en Ciencias Matemáticas) Marta Bergallo y Mestre em Engenharia Civil (Master en Ingeniería Civil) Victorio Sonzogni. También quiere agradecer el trabajo en una versión preliminar para otro exótico dependiente del camino y para Vanillas, de la Licenciada en Matemática Aplicada Mónica Zanor que, razones laborales y de maternidad reciente de una beba, esta vez no la dejaron ser de la partida, pero confiamos en su pronto retorno.