



SOCIEDAD ARGENTINA DOCENTES EN ADMINISTRACION FINANCIERA

CONFERENCIAS NOBEL EN FINANZAS
Volumen 2

William F. Sharpe

CUADERNOS DE FINANZAS **18**

DOCUMENTOS DE TRABAJO DE SADAF

Capital asset prices with and without negative holdings
Journal of Finance, vol.46, June 1991
Traducción: Ricardo A. Fornero Marzo 1992

El formato del texto es diferente a la publicación original

PRECIOS DE LOS TITULOS Y POSIBILIDAD DE TENENCIAS NEGATIVAS

William F. Sharpe
Stanford University

1. INTRODUCCION

Siguiendo la tradición me ocuparé del Modelo de Valoración de Títulos, tema con el cual he estado vinculado por más de 25 años, y que la Royal Swedish Academy of Sciences ha citado en mi honor cuando me ha concedido el Premio en Ciencias Económicas en Memoria de Alfred Nobel.

Primero presento el Modelo de Valoración de Títulos (Capital Asset Pricing Model, en adelante CAPM) incorporando no sólo mis propias contribuciones (que comenzaron con Sharpe, 1961 y 1964) sino también el trabajo fundamental de Lintner (1965, 1969) y las contribuciones de Mossin (1966) y otros. Mi objetivo es hacerlo de modo sucinto, para destacar el contenido económico de la teoría.

A continuación modifiqué el modelo para reflejar un caso extremo de situación institucional que impida a los inversores elegir carteras completamente óptimas. En particular, supongo que los inversores no pueden tener posiciones negativas en títulos. Para esta versión del modelo me baso de manera importante en los ensayos de Glenn (1976), Levy (1978), Merton (1987) y Markowitz (1987, 1990).

Finalmente discuto los contratos a futuro en índices de acciones, una innovación financiera de significativa importancia que surgió después del desarrollo del CAPM. Tales contratos pueden aumentar la eficiencia de los mercados de capital en diferentes formas. En particular, pueden aproximar los mercados reales al mundo idealizado que supone el Modelo de Valoración de Títulos.

2. EL MODELO DE VALORACION DE TITULOS

La versión inicial del CAPM, desarrollada hace más de 25 años, fue extremadamente austera. Trataba los aspectos centrales del equilibrio en los mercados de capital, y no consideraba varios aspectos importantes de esos mercados tal como existían en ese momento. En los últimos 25 años los teóricos han extendido y adaptado el enfoque para incorporar algunos de esos fenómenos del mundo real. Ejemplos importantes son las versiones de Lintner (1969), que enfoca los rendimientos en términos reales; de Brennan (1970), que trata los efectos de los impuestos; de Black (1972), en la cual no hay un título sin riesgo; de Merton (1973), que incorpora las preocupaciones de los inversores con respecto a las oportunidades futuras de inversión; de Rubinstein (1974), que se ocupa de una clase más general de funciones de utilidad; de Kraus & Litzen-

berger (1976), que tiene en cuenta el tercer momento de la distribución de rendimientos; de Breeden (1979), que enfoca las preferencias por consumo de los inversores; de Merton (1987), que trata la segmentación de mercado; y de Markowitz (1990), que considera restricciones para ventas cortas.

Durante este tiempo se han formulado variaciones del modelo para pruebas empíricas cada vez más poderosas. También se han propuesto modelos alternativos, el más notable la Teoría de Valoración por Arbitraje de Ross (1976).

Mientras los teóricos se ocupaban en adaptar el CAPM para incorporar los obstáculos a la eficiencia del mundo real, los operadores se dedicaban a reducir algunos de esos obstáculos. Algunos de los instrumentos e instituciones financieras desarrollados en la última década sirven para "completar el mercado" de un modo mejor, en particular para lograr una distribución más eficiente del riesgo entre los inversores.

No intentaré un tratamiento general de los costos y las restricciones institucionales que pueden afectar la eficiencia con la cual se asigna el riesgo, ni las diversas innovaciones financieras que sirven para reducir esos costos y restricciones. Enfocaré sólo un ejemplo prototípico en cada ámbito.

Para facilitar la exposición algunas fórmulas y pruebas se indican como notas al final. En esto sigo una larga tradición personal: la demostración clave en mi primer ensayo publicado sobre el CAPM (1964) estaba contenida en una nota (más específicamente la nota 22).

3. EL CAPM Y LA TEORIA DE LA ECONOMIA FINANCIERA

Una taxonomía común en la economía financiera diferencia entre las teorías *normativas* (prescriptivas) y *las positivas* (descriptivas). La teoría de la cartera de Markowitz (1952) que inició el camino para el enfoque de media-variancia cae claramente en la primera categoría, al ocuparse de las reglas para la selección óptima de cartera por un individuo. El CAPM puede ser clasificado netamente en la segunda, ya que se ocupa de la determinación de los precios de los títulos en un mercado competitivo.

Pero estas dos categorías no son suficientes. Gran parte del trabajo en este campo puede describirse mejor como un enfoque normativo de los temas en un contexto positivo. El modelo fundamental de Modigliani-Miller (1958) es de este tipo, ya que prescribe la conducta óptima de una empresa que enfrenta un mercado de capital en el cual los precios de los títulos son determinados por las acciones de inversores individuales que conocen las oportunidades de sustitución.

Aún esta taxonomía de tres tipos no captura las interrelaciones entre los enfoques alternativos. La mayoría de los modelos positivos en economía financiera, así como en el campo más amplio de la economía, se construyen sobre fundamentos normativos. Se supone que los individuos siguen una conducta maximizadora e interactúan con otros hasta que se alcanza una condición de equilibrio. Este es el caso del CAPM, que explícitamente supone que los inversores siguen las prescripciones de la teoría de la cartera de Markowitz. Además, como en la teoría microeconómica tradicional, las teorías financieras de las relaciones de equilibrio pueden considerarse prescripciones para las decisiones en mercados, las cuales quizá no se adopten en forma estrictamente acorde a las condiciones de la teoría.

El dominio de la teoría positiva de economía financiera, a su vez, está dividido en un conjunto de modelos que pueden denominarse *basados en utilidad*, y otro complementario, de modelos *basados en arbitraje*. Los modelos de esta última categoría derivan consecuencias del supuesto de que los precios de los títulos se ajustarán hasta que sea imposible seguir una estrategia que no requiera inversión inicial, proporcione un flujo de fondos positivo en por lo menos un

estado del mundo, y requiera un flujo de fondos no negativo en cualquier estado futuro del mundo.

Teorías prominentes de la economía financiera están basadas en arbitraje: el modelo de Black-Scholes (1973), que trata los precios de las opciones junto con sus títulos relacionados; y la Teoría de Valoración por Arbitraje (Arbitrage Pricing Theory) de Ross (1976), que extrae consecuencias sobre los precios de los títulos cuando los rendimientos están generados por un modelo de factores especificado. Si bien el monumental enfoque de la incertidumbre de Arrow (1953) Debreu (1959) según preferencias de estado realiza algunos supuestos sobre las funciones de utilidad de los individuos, varios de sus resultados clave están basados en arbitraje. Se ha construido un gran número de teorías financieras utilizando el paradigma de "estados del mundo" de Arrow-Debreu, entre ellas el modelo binominal de valoración de opciones presentado por primera vez en mi texto de 1978 y extendido por Cox, Ross & Rubinstein (1979), y varios otros.

Los modelos de la primera categoría, basados en la utilidad, normalmente utilizan las condiciones requeridas por los de la segunda, pero derivan consecuencias más estrictas agregando supuestos sobre las *funciones de utilidad* que los inversores maximizan. (Por supuesto, es cierto que los modelos basados en arbitraje realizan algunos supuestos sobre las preferencias de los inversores, por ejemplo, que prefieren pagos mayores a menores en cualquier estado del mundo. Sin embargo, tales supuestos son mínimos, comparados con los mucho más detallados que contienen los modelos basados en utilidad.)

Gran parte del trabajo inicial de la economía financiera se ocupó de los mercados en los cuales la interacción de un gran número de individuos determina los precios, estando cada uno igualmente informado. En este sentido se siguió la tradición de la teoría económica del equilibrio competitivo. Más recientemente la atención se ha enfocado a los mercados en los cuales hay unos pocos participantes, y/o en los cuales individuos diferentes tienen distintos conjuntos de información.

El CAPM, por supuesto, es una teoría en la tradición inicial del campo. Es una teoría positiva, incorpora supuestos sobre las funciones de utilidad, y supone un mercado con un gran número de participantes, cada uno de los cuales tiene acceso al mismo conjunto de información.

4. LOS PRECIOS DE TITULOS CUANDO SON POSIBLES LAS TENENCIAS NEGATIVAS

SUPUESTOS. Supongamos que la economía consiste en K inversores. La riqueza invertida por cada inversor k es W_k , expresada como una proporción de la riqueza total invertida por todos ellos. Cada uno busca maximizar:

$$E_c(1) \quad U_k = E_k - V_k / t_k$$

Por conveniencia de exposición llamaré U_k a la *utilidad* del inversor k . Esto puede entenderse como una función de utilidad primitiva. Alternativamente puede considerarse una aproximación a la *utilidad esperada* del inversor en el sentido de Von Neumann & Morgenstern (1944). Si se supone que el inversor tiene una función de utilidad exponencial negativa para su riqueza y los rendimientos están distribuidos conjuntamente de modo normal, la aproximación será exacta. Aún si el inversor tiene alguna otra función de utilidad, y/o los rendimientos no tienen esa distribución, U_k puede proporcionar una excelente aproximación, como muestran Levy & Markowitz (1979).

En la ecuación 1 indicamos

E_k = rendimiento esperado de las carteras de los k inversores

V_k = variancia de la cartera

t_k = tolerancia al riesgo (los inversores difieren en su tolerancia frente al riesgo)

Esta relación puede interpretarse de varios modos. De modo claro, la tolerancia al riesgo mide la *tasa marginal de sustitución de variancia del rendimiento esperado* para un inversor. Por conveniencia suponemos que la tolerancia al riesgo de cada inversor es constante dentro del rango factible de rendimiento esperado y variancia. (Esto no es estrictamente necesario. Los resultados siguientes pueden obtenerse en condiciones más generales, interpretando los valores de t_k como las tasas marginales de sustitución de los inversores, para sus tenencias óptimas.)

El valor obtenido dividiendo la variancia de la cartera y la tolerancia al riesgo de un inversor puede entenderse como una penalidad por riesgo, que lleva a la interpretación de U_k como un *rendimiento esperado ajustado por riesgo*. Alternativamente, U_k puede considerarse un *rendimiento equivalente a certeza*, ya que una cartera con un rendimiento U_k y riesgo cero tendría la misma utilidad para el inversor que la cartera en cuestión.

Esta es la función objetivo del enfoque de media-variancia de Markowitz (1952) para la selección de cartera. Es una caracterización muy pobre de los objetivos de los inversores, que utiliza una perspectiva miope (es decir, "de un período") y enfoca sólo dos aspectos de la distribución de los posibles rendimientos en ese período. (Sin embargo, cabe advertir que este supuesto será menos grave cuanto más corto sea el período que se considera. En las versiones del modelo en tiempo continuo el período de tiempo es, efectivamente, de extensión infinitesimal. Bajo estas condiciones, los dos momentos pueden servir como representación adecuada aún si la distribución de probabilidad de los rendimientos en un período finito y/o las preferencias por rendimiento de los inversores en tal período son bastante complejas.)

Además, supone que el inversor (guiado, quizá, por un asesor) puede establecer al menos los dos primeros momentos de las distribuciones de probabilidad asociadas a carteras alternativas de inversión. El enfoque trata de capturar la mayor parte de lo que les pasa a los inversores. Sirve como una base para extensiones y adaptaciones diseñadas para abarcar aspectos adicionales de las preferencias del inversor.

Como en el trabajo de Markowitz, el rendimiento esperado de una cartera depende de los rendimientos esperados de sus títulos componentes [1] (ver notas aclaratorias al final). El riesgo de la cartera depende tanto del riesgo de sus componentes como de las correlaciones entre esos títulos. De modo más resumido: el riesgo de la cartera depende de las covariancias entre los títulos [2].

Todos los inversores coinciden en los rendimientos esperados y covariancias. Por supuesto, estos momentos de la distribución de los rendimientos serán una función de los precios de los títulos. Cuando se alcanzan los precios de equilibrio, sin embargo, cada inversor elegirá una cartera óptima, dados los valores corrientes de los rendimientos esperados y covariancias; más aún, las decisiones de cartera resultantes llevarán a que el mercado se limpie.

Los inversores pueden tomar posiciones negativas en uno o más títulos. Estas tenencias pueden ser positivas, cero o negativas. No hay costos de transacción ni otras restricciones, y las posiciones en títulos son completamente divisibles.

OPTIMIZACION DE CARTERA. El inversor k busca maximizar U_k sujeto a una *restricción de inversión completa* de la forma

$$\sum_i X_{ik} = 1$$

donde

X_{ik} = proporción de la cartera del inversor k invertida en el título i .

Para esto selecciona una cartera en la cual la utilidad marginal de cada título es la misma. Si el caso no es éste sería posible reasignar los fondos de un título con utilidad marginal más baja a uno con utilidad marginal más alta, aumentando así la utilidad dentro de la restricción de inversión completa.

La *condición de primer orden* para la cartera óptima puede indicarse

$$\text{Ec (2)} \quad E_i - \frac{C_{ik}}{t_k} = \lambda_{fk} \quad \text{para todo } i$$

donde

C_{ik} = covariancia del título i con la cartera óptima del inversor k

λ_{fk} = *utilidad marginal de la riqueza* del inversor k (ver [3]).

AGREGACION. Supongamos que los mercados se han limpiado, esto es, los K inversores en la economía poseen todos los títulos. Las relaciones entre las variables básicas puede examinarse en forma agregada con las condiciones que deben cumplirse cuando cada inversor obtiene una solución óptima, teniendo en cuenta los montos relativos que cada uno ha invertido. Esto requiere sólo unas pocas operaciones simples.

En efecto, de las condiciones de primer orden para cada título se obtiene la riqueza promedio ponderada. El resultado, sin mucha sorpresa, es similar al que vimos antes.

$$\text{Ec (3)} \quad E_i - \frac{C_{im}}{t_m} = \lambda_{fm} \quad \text{para todo } i$$

Aquí

t_m = tolerancia al riesgo en el promedio patrimonial de los inversores en el mercado, o la *tolerancia social al riesgo*

C_{im} = covariancia del título i con la *cartera de mercado*, que incluye todos los títulos en el mercado, cada uno representado en proporción a su valor

λ_{fm} = promedio ponderado de los valores de λ_{fk} para los K inversores, donde las ponderaciones dependen de la influencia de los inversores en el mercado (la influencia a su vez depende de los montos invertidos y la tolerancia al riesgo).

Esto último, en definitiva, puede interpretarse como la *utilidad marginal social de la riqueza*. [4]

RENDIMIENTOS ESPERADOS. Una de las consecuencias fundamentales del CAPM es la relación que existe entre los rendimientos esperados de los títulos. Esto puede obtenerse por un pequeño reordenamiento de la ecuación anterior:

$$\text{Ec (4)} \quad E_i = \lambda_{fm} + \frac{C_{im}}{t_m} \quad \text{para todo } i$$

Esto muestra que en equilibrio hay una relación lineal entre los rendimientos esperados de los títulos y sus covariancias con la cartera de mercado. Usualmente la relación se expresa en términos de una *beta* del título, una medida escalar que se obtiene dividiendo la covariancia del título con la cartera de mercado y la variancia de la cartera de mercado (V_m). Sustituyendo esta medida tenemos

$$\text{Ec (5)} \quad E_i = ?_{fm} + \frac{2 V_m}{t_m} \beta_{im} \quad \text{para todo } i$$

donde

$$\beta_{im} \equiv C_{im} / V_m$$

Por supuesto, la ecuación (5) también es lineal. Más aún, ya que los rendimientos esperados y covariancias de la cartera con la cartera de mercado son simplemente promedios ponderados por valor de las medidas correspondientes para los títulos componentes, esta relación existe para todas las carteras así como para todos los títulos.

EL PREMIO POR RIESGO. Dado que la ecuación anterior es válida para cualquier cartera lo será también para la cartera de mercado en sí misma. Es más, el valor beta de la cartera de mercado consigo misma debe ser igual a 1. Si E_m representa el rendimiento esperado de la cartera de mercado, estas relaciones implican que

$$\text{Ec (6)} \quad \frac{E_m - ?_{fm}}{V_m} = \frac{2}{t_m}$$

El término en el lado izquierdo es el *premio por riesgo* por unidad de variancia. Como muestra la ecuación, está relacionado de modo inverso con la tolerancia social frente al riesgo.

LA LINEA DEL MERCADO DE TITULOS. Sustituyendo el premio por riesgo por unidad de variancia (ecuación 6) por $2/t_m$ en la ecuación 5 del rendimiento esperado del título i obtenemos una forma más habitual de la relación:

$$\text{Ec (7)} \quad E_i = ?_{fm} + (E_m - ?_{fm}) \beta_{im} \quad \text{para todo } i$$

Una descripción gráfica viene dada por el término *línea del mercado de títulos*. El CAPM implica que todos los títulos y carteras se ubicarán a lo largo de esta línea. Podría decirse que esta relación es la conclusión aislada más importante que deriva del CAPM. Muestra que los rendimientos esperados estarán relacionados linealmente con el riesgo de mercado y no, como suele pensarse, con el *riesgo total*.

ENDEUDAMIENTO Y PRESTAMO SIN RIESGO. Como puede verse en la ecuación (7), $?_{fm}$ puede interpretarse como el rendimiento esperado de cualquier cartera de "beta cero", incluyendo la cartera de beta cero con mínima variancia, como sugiere Black (1972). Si está disponible un título sin riesgo, $?_{fm}$ será igual a R_f , la tasa de rendimiento sin riesgo. En estas condiciones, la relación de la Línea del Mercado de Títulos puede escribirse

$$\text{Ec (8)} \quad E_i = R_f + (E_m - R_f) \beta_{im} \quad \text{para todo } i$$

En adelante supondremos que existe un título sin riesgo, y que su tenencia puede ser positiva o negativa, es decir, que los inversores pueden prestar o tomar prestado a la tasa sin riesgo R_f .

LA LINEA CARACTERISTICA. El valor de β_{im} puede tener una interpretación similar a la que surge en el análisis de regresión utilizando datos históricos, si bien en el contexto del CAPM debe interpretarse estrictamente como un valor *ex ante* basado en las creencias probabilísticas sobre los ingresos futuros. La relación entre R_i y R_m , los rendimientos esperados del título i y de la cartera de mercado, respectivamente, pueden escribirse

$$\text{Ec (9)} \quad R_i = a_i + \beta_{im} R_m + e_i$$

Por la forma en que se define β_{im} , e_i no debe estar correlacionado con R_m , aunque no necesariamente debe ser independiente. Más aún, a_i puede definirse de modo que el valor esperado de e_i sea cero. Sin embargo, no hay razón para esperar que e_i , el *rendimiento residual* del título i , o *componente de rendimiento que no surge del mercado* del título i , no estará correlacionado con el componente comparable del título j . (De hecho, este puede no ser estrictamente el caso en economías con muchos títulos. Ya que la suma del valor de mercado ponderado del lado izquierdo de ecuación 9 es igual a R_m , la suma promedio del mercado de los valores de e_i deben ser cero. Entonces, al menos dos de los valores de e_i deben estar correlacionados negativamente.)

Mientras que el CAPM no establece restricciones en las correlaciones de los términos residuales, sí restringe los valores de los términos de intersección (a_i , ordenada al origen). Ya que el valor esperado de e_i es cero, la relación de la línea del mercado de títulos requiere que cada intersección esté relacionada directamente con el valor beta del título [5]. El CAPM implica entonces que

$$\text{Ec (10)} \quad R_i = (1 - \beta_{im}) R_f + \beta_{im} R_m + e_i$$

Una descripción gráfica de esta relación se denomina la *línea característica* de un título o una cartera.

MODELOS DE FACTORES DEL RENDIMIENTO DE LOS TITULOS. Ha habido bastante confusión acerca de las relaciones entre los resultados del equilibrio del CAPM y las relaciones subyacentes entre los rendimientos de los títulos. Como puede advertirse, el CAPM no hace supuestos sobre el "proceso de generación del rendimiento". De ahí que sus resultados son completamente consistentes con *cualquiera* de estos procesos.

Los enfoques iniciales de la selección de cartera (tal como los sugeridos por Markowitz, 1959, y por los desarrollos adicionales de Sharpe, 1961, 1963, 1970) suponían que los rendimientos eran generados por un modelo similar (aunque no idéntico) al de ecuación (9), con la condición adicional de que los valores residuales no estuvieran correlacionados entre los títulos. (En un modelo tal, el "factor común" puede estar altamente correlacionado con el rendimiento de la cartera de mercado, pero no es exactamente igual a este, si se mantiene el supuesto de que los valores residuales no están correlacionados entre sí.)

Mi enfoque inicial de la valoración de títulos (en Sharpe, 1961) tenía un supuesto similar. Un modelo de "índice único" o "factor único" como este representa un caso especial de un *modelo de factores del rendimiento de un título*. Muchos investigadores han explorado modelos multifactores, y estos modelos tienen un uso amplio en la práctica financiera.

Un modelo de factores del rendimiento de los títulos identifican unos pocos factores clave con los que se supone que el rendimiento de un título está relacionado linealmente, de la siguiente manera:

$$\text{Ec (11)} \quad R_i = a_i + S_1 b_{i1} F_1 + e_i$$

En esta expresión se supone que los valores de e_i no están correlacionados entre los distintos títulos. La Teoría de Valoración por Arbitraje (APT) de Ross (1976) concluye que, si los rendimientos están generados por un modelo como éste, los rendimientos esperados deben estar relacionados aproximadamente de modo lineal con los valores b_i , si han desaparecido las oportunidades de ganar por arbitraje. Sin embargo, la APT no proporciona conclusiones sobre los signos o las magnitudes de los coeficientes en las relaciones de valoración asociadas.

Es enteramente posible ampliar los supuestos de la APT con los del CAPM (el más importante, que los inversores maximizan funciones de utilidad de media-variancia). Las consecuencias resultantes serán consistentes con ambas teorías. Más aún, al hacer supuestos sobre los objetivos de los inversores pueden obtenerse afirmaciones precisas sobre los signos y las magnitudes de los coeficientes de la relación de valoración de la APT, como se muestra en Sharpe (1984).

LA EFICIENCIA DE LA CARTERA DE MERCADO. Un concepto básico proporcionado por Markowitz (1952) es el de *eficiencia* de una cartera. En el contexto presente una cartera puede decirse que es *eficiente* si resulta óptima para un inversor con una tolerancia al riesgo no negativa. Al comparar las ecuaciones (2) y (3) se advierte de modo directo que la cartera de mercado es eficiente en este sentido.

Consideremos un inversor que tiene una tolerancia al riesgo igual a t_m , y que su posición es la cartera de mercado. La ecuación (3) muestra que cada título reunirá las condiciones de primer orden para la maximización de su utilidad. Si la cartera de mercado es óptima para este inversor, debe ser eficiente. De modo más específico, la cartera de mercado será óptima para un inversor con una tolerancia al riesgo promedio (social).

EL TEOREMA DE SEPARACION. Bajo las condiciones supuestas en el CAPM la cartera óptima de cada inversor puede obtenerse con una combinación adecuadamente elegida de dos carteras eficientes cualesquiera, seleccionadas arbitrariamente [6]. Dos elecciones naturales son aquellas que serían óptimas para inversores con tolerancia al riesgo de cero y de t_m . La primera es la cartera de mínima variancia. La segunda es, por supuesto, la cartera de mercado. Siguiendo a Tobin (1959) esto generalmente se denomina el teorema de la separación (the two-fund separation theorem).

Cuando está disponible un título sin riesgo la cartera de mínima variancia se formará únicamente con este título. Así todos los inversores tendrán combinaciones del título sin riesgo y la cartera de mercado. Para los inversores con una tolerancia al riesgo mayor que t_m la inversión óptima involucrará una posición negativa en el título sin riesgo y una posición positiva en la cartera de mercado (y de ahí, en todos los títulos con riesgo). Cabe advertir, sin embargo, que la cartera de mercado incluirá la oferta neta positiva de títulos sin riesgo en la economía; por esto, sólo los inversores con valores de t_k considerablemente mayores que t_m tomarán efectivamente dinero prestado. Cualquier otro inversor seleccionará alguna combinación del título sin riesgo y la cartera de mercado, y entonces mantendrá sólo tenencias no negativas.

CONSECUENCIAS FUNDAMENTALES. Las consecuencias clave del CAPM son:

1. la cartera de mercado será eficiente
2. todas las carteras eficientes serán equivalentes a invertir en la cartera de mercado más, posiblemente, prestar dinero o tomar prestado
3. la relación entre el rendimiento esperado y beta será lineal

Estas relaciones tienen diversas aplicaciones prácticas. Los inversores pueden identificar fácilmente estrategias eficientes de cartera, y tales estrategias pueden efectivamente implemen-

tarse a través de fondos mutuos y otros vehículos institucionales. Los decididores en las empresas y el gobierno pueden utilizar la relación de la Línea del Mercado de Títulos para determinar la deseabilidad de un proyecto de inversión, comparando su rendimiento esperado con el disponible en el mercado de capital para proyectos con similares valores de beta (es decir, con similar riesgo de mercado o sensibilidad a las condiciones económicas).

En el mundo sin fricciones del CAPM cada inversor elige una cartera que maximiza su utilidad. Esto lleva a una distribución eficiente del riesgo en la economía, por supuesto, dada una distribución de riqueza entre los inversores.

5. TENENCIAS NEGATIVAS

El CAPM supone que los inversores pueden tener posiciones negativas en títulos. Para el título sin riesgo la manera tradicional en que se alcanza una posición negativa es tomando dinero prestado. Para un título con riesgo la forma habitual requiere una venta corta.

Una posición corta se forma tomando prestado un título, tal como una acción, con una promesa de devolución. El título así obtenido se vende. Si el producido de la venta puede utilizarse para otros tipos de inversión, el efecto general es equivalente a una tenencia negativa del título en cuestión. Si, no obstante, ese producido debe depositarse como garantía por el título tomado en préstamo, la posición corta puede diferir de una tenencia negativa del título.

En algunos países el producido de algunas ventas cortas se deposita de esta manera, y el vendedor a corto recibe un interés pequeño de este depósito, o ninguno. (Con frecuencia hay que entregar un colateral adicional como "margen", pero el vendedor a corto generalmente recibe el producido de la inversión de este monto.) Más aún, algunos inversores institucionales han eliminado el uso de posiciones cortas, sea a través de reglas explícitas o de modo implícito por la amenaza de litigios por violación de los estándares fiduciarios. Pueden aplicarse otras restricciones; por ejemplo, las bolsas pueden no permitir una venta corta que siga a una disminución del precio del título en cuestión.

Por necesidad las teorías basadas en arbitraje permiten posiciones cortas. Usualmente no es claro si estas posiciones existirán en equilibrio, ya que los modelos no tienen suficientes supuestos (referidos a funciones de utilidad) para caracterizar las tenencias de equilibrio. Pero lo más importante es que, por la propia naturaleza del enfoque de arbitraje, en equilibrio son posibles múltiples soluciones en términos de tenencias, dadas por la presencia (real o potencial) de títulos redundantes.

Si bien el CAPM supone que los inversores pueden tomar posiciones negativas en algún título, en equilibrio implica que las únicas posiciones negativas que existirán son las que involucran a la cartera de mínima variancia. Cuando está disponible un título sin riesgo las únicas tenencias negativas en equilibrio involucrarán endeudamiento de aquellos inversores con tolerancia al riesgo por arriba del promedio, quienes financian de este modo sus inversiones adicionales en una cartera que representa el mercado.

Cuando no hay costos por el seguimiento de las posiciones de los inversores, ni costos de transacción, y la información disponible sobre los títulos es igual para todos los inversores, las únicas restricciones a las tenencias negativas serían las de poder afrontar los pagos requeridos. La cartera de un inversor debe ser tal que, en cada estado del mundo, la suma de los flujos de fondos positivos sea al menos igual a la suma de los flujos de fondos requeridos para calzar los pagos hechos por los emisores de los títulos de los cuales se tienen posiciones negativas. Si no se cumple esta condición tales títulos no han sido totalmente replicados, y el inversor no puede esperar el precio completo cuando toma las posiciones negativas asociadas.

Ya que no toda la información es enteramente pública, y el seguimiento y las transacciones tienen un costo, las reglamentaciones institucionales para las ventas cortas tradicionalmente

tienen el requerimiento de entregar un colateral separado para cada posición, con una consideración muy pequeña de los efectos de diversificación de la cartera, si es que los tienen en cuenta de algún modo. Bajo tales condiciones es difícil o caro para un inversor con alta tolerancia al riesgo tomar dinero prestado para financiar inversiones adicionales en una cartera como la de mercado. Los contratos a futuro sobre índices de acciones proporcionan ahora a los inversores medios más eficientes para hacer esto. Antes de considerarlos, sin embargo, investigaremos las características de un caso extremo en que no sean posibles las posiciones negativas.

6. LOS PRECIOS DE TITULOS CUANDO NO SON POSIBLES LAS TENENCIAS NEGATIVAS

SUPUESTOS. Para explorar los efectos de las restricciones sobre tenencias de títulos mantendremos todos los supuestos del CAPM, y agregaremos $N \times K$ restricciones de no negatividad de la forma

$$x_{ik} \geq 0 \quad \text{para todo } i \text{ y } k$$

OPTIMIZACION DE CARTERA. El inversor K busca maximizar U_k sujeto a la restricción de inversión completa y las restricciones relevantes de no negatividad. Este es un problema de *programación cuadrática*. Se puede obtener una solución exacta de un problema de optimización de cartera con esta forma utilizando el *algoritmo de la línea crítica* formulado por Markowitz (1956).

Al establecer la solución, algunos valores de x_k serán positivos. Se dice que los correspondientes títulos están *en* la cartera óptima. Los restantes estarán por debajo de los límites inferiores (cero), y se dice que están *fuera* de esa cartera.

Cada uno de los títulos *en* la cartera óptima debe tener la misma utilidad marginal. Si no fuera éste el caso sería posible reasignar fondos de uno de tales títulos con utilidad marginal más baja a otro con utilidad marginal más alta, aumentando de este modo la utilidad sin violar ninguna de las restricciones. El valor de la utilidad marginal común a todos esos títulos será la utilidad marginal de la riqueza del inversor, que venimos llamando λ_{fk} .

Cada uno de los títulos *fuera* de la cartera debe tener una utilidad marginal menor que, o a lo sumo igual a, la de los títulos de la cartera. Si no pasa esto sería posible reasignar fondos de un título en la cartera a un título fuera de la cartera, aumentando así la utilidad, dentro de las restricciones consideradas.

Estas relaciones, que derivan de otras más generales llamadas condiciones de Kuhn-Tucker, pueden expresarse

$$\text{Ec (12)} \quad E_i - \frac{C_{ik}}{t_k} = \lambda_{fk} - z_{ik} \quad \text{para todo } i$$

donde z_{ik} será cero para los títulos en la cartera, y mayor que o igual a cero para los títulos fuera de la cartera.

AGREGACION. Como en el caso del CAPM hacemos un promedio ponderado por patrimonio de las condiciones de optimización de las carteras de los inversores individuales. El resultado tiene una forma similar:

$$\text{Ec (13)} \quad E_i - \frac{2}{t_m} C_{im} = ?_{fm} - z_{im} \quad \text{para todo } i$$

No es sorprendente que z_{im} sea un promedio ponderado de los valores z_{ik} para los K inversores, cuyas ponderaciones dependen de la influencia de los inversores en el mercado. Esto es

$$z_m \equiv (S_k W_k t_k / t_m) z_{ik}$$

RENDIMIENTOS ESPERADOS. La ecuación (13) puede transformarse para obtener

$$\text{Ec (14)} \quad E_i = ?_{fm} - \frac{2 V_m}{t_m} \beta_{im} - z_{im} \quad \text{para todo } i$$

Si no fuera por el último término existiría una relación lineal entre el rendimiento esperado y beta, como en CAPM. Pero el último término implica que sólo los títulos que están *en* la cartera óptima de *cada* inversor se ubicarán a lo largo de una línea (sólo para tales títulos los valores z_{ik} serán cero, y por tanto su promedio ponderado, z_m , será cero). Un título que está *fuera* de la cartera óptima de al menos un inversor se ubicará por debajo de la línea. (Al menos un valor z_{ik} será positivo; como los demás serán iguales a cero, el valor z_m , su promedio ponderado, será positivo.) Más aún, mientras mayor sea el número de inversores para los cuales sea operante el límite inferior de un título, mayor es probablemente el valor de z_{im} que corresponde.

Es importante advertir que las magnitudes de los valores z_m estarán afectadas por la distribución de la tolerancia al riesgo entre los inversores. En el caso especial en el cual todos los inversores tienen igual tolerancia al riesgo, cada uno de ellos elegirá la cartera de mercado, y todos los valores z_m serán iguales a cero; con esto se obtienen resultados idénticos a los del CAPM original.

De modo amplio, mientras mayor sea la variación de la tolerancia al riesgo entre los inversores más probable es que algún valor de z_m sea positivo. Sin embargo, en esta conexión la influencia de cada inversor dependerá tanto de su riqueza como de su tolerancia frente al riesgo. A menos que haya una variación sustancial en la tolerancia al riesgo de los inversores con mayor riqueza, los valores z_m pueden estar muy cerca de cero, con lo que se llega a resultados muy similares a los del CAPM.

EL PREMIO POR RIESGO. Para determinar el premio por riesgo en este caso sólo debemos tomar el valor de mercado de las relaciones de equilibrio en la ecuación anterior:

$$\text{Ec (15)} \quad \frac{E_m - ?_{fm}}{V_m} = \frac{2}{t_m} \frac{z_{mm}}{V_m}$$

donde z_{mm} es el valor de mercado promedio ponderado de los valores z_{im} (ver [7]).

Es claro que el premio por riesgo por unidad de variancia será una función de la magnitud en que las restricciones de no negatividad afecten las carteras de los inversores (las que también afectarán los $?_{fm}$).

LA RELACION DE LA LINEA DEL MERCADO DE TITULOS. Dado el término final de la ecuación anterior, no es particularmente útil derivar la contraparte de la línea del mercado de títulos del CAPM. Sin embargo, la ecuación (14) puede mostrar el análogo de la línea para este caso.

Como se indicó antes, los primeros dos términos proporcionan una línea. Pero en este caso la línea sirve como un límite superior. Algunos o todos los títulos pueden caer por debajo de la línea, y la distancia depende del grado en que sean operantes las restricciones de no negatividad asociadas. Así, puede no haber una relación lineal precisa entre los rendimientos esperados y los valores de beta.

TITULOS SIN RIESGO. En este caso, como se excluyen las posiciones negativas, no es posible endeudarse a la tasa sin riesgo. La oferta neta positiva de títulos sin riesgo, no obstante, se incluirá en la cartera de mercado. Para cualquier inversor para el cual sea operante la restricción de no endeudamiento, β_k excederá R_f . Para todos los otros, los dos valores serán iguales.

LA EFICIENCIA DE LA CARTERA DE MERCADO. En el CAPM la utilidad marginal de todos los títulos (respecto a su participación en la cartera de mercado) es igual cuando se evalúan utilizando la tolerancia social al riesgo. Esto es suficiente para la eficiencia de la cartera de mercado. Y es necesariamente así si la cartera de mercado es eficiente para un inversor con tolerancia al riesgo igual a la social.

De modo más general, para que la cartera de mercado sea eficiente la utilidad marginal de todos los títulos (medida respecto a la cartera de mercado) debe ser igual cuando se evalúan utilizando alguna tolerancia al riesgo positiva. Esto surge del hecho de que la cartera de mercado incluye cantidades positivas de cada título, ya que todos los títulos estarán *en* esa cartera.

Para que se cumpla esta condición debe existir una relación lineal entre el rendimiento esperado de un título y su valor beta [8]. Este puede no ser el caso, con restricciones para las tenencias negativas, debido a la influencia de los valores z_m . (Si todos los valores z_m son cero, por supuesto, se obtendrá la relación lineal. En la situación, altamente improbable, en que exista una relación lineal entre los valores z_{im} y los correspondientes valores beta, también existirá una relación lineal entre E_i y los valores β_{im} .)

Por tanto, la cartera de mercado puede ser ineficiente. Cuán ineficiente es algo que, por supuesto, dependerá de las magnitudes de los valores z_m : si la mayoría son pequeños el grado de ineficiencia de la cartera de mercado puede ser insignificante.

SEPARACION DE FONDOS. Markowitz (1959) mostró que las restricciones de no negatividad producen una frontera eficiente en parte lineal en el espacio de oportunidades de tenencia. En este rango lineal las carteras eficientes pueden obtenerse combinando cualesquiera otras dos (las que están en los puntos extremos proporcionan elecciones convenientes). Sin embargo, en general no pueden utilizarse dos carteras para obtener *todas* las carteras eficientes. Por esto, la separación de fondos puede no ser aplicable estrictamente en este caso.

CONSECUENCIAS FUNDAMENTALES. Cuando se excluyen posiciones negativas

1. la cartera de mercado puede no ser eficiente
2. algunas carteras eficientes pueden no ser equivalentes a invertir en la cartera de mercado más, posiblemente, préstamo o endeudamiento, y
3. puede no existir una relación lineal entre el rendimiento esperado y beta

Estas consecuencias muestran una disminución en la eficiencia con la cual el riesgo se distribuye en la economía. La selección de carteras óptimas se hace más difícil que en la situación original del CAPM. El cálculo del costo de capital para los proyectos de inversión de empresas y gobierno puede requerir más que la determinación de una relación simple entre el rendimiento esperado y el riesgo de mercado. De modo más fundamental, la riqueza puede ser menor que la que existiría si se reducen o eliminan las restricciones de no negatividad.

Si bien la magnitud de la desviación de las consecuencias del CAPM original puede ser pequeña aún en las condiciones extremas supuestas en este caso, es claro que los arreglos institucionales que mejoren la capacidad del inversor para tomar posiciones negativas puede aumentar la eficiencia con la que se distribuye el riesgo en la economía. Veremos una innovación financiera que proporciona esa mejora: el contrato a futuro sobre índices de acciones.

7. INNOVACION FINANCIERA

En mayor grado que muchas otras ciencias la economía no sólo analiza la realidad sino que también la altera. La teoría lleva a las aplicaciones, que cambian las conductas. En ningún lugar esto es tan evidente como en la economía financiera.

El campo académico de las finanzas difiere radicalmente del que existía hace tres décadas, en gran parte por el avance de la teoría financiera y la extensa investigación empírica que ha surgido de este avance. La práctica de las finanzas ha sido modificada de modos básicos por el progreso de la economía financiera. Lo más notable, la última década se ha caracterizado por una innovación sin precedentes en instrumentos financieros, mercados e instituciones.

Frente al ritmo desconcertante de tales innovaciones no sorprende que algunos individuos y organizaciones tengan a veces dificultades para comprender cabalmente los usos apropiados de algunos de los nuevos instrumentos y procedimientos. Pero es claro que los principios de la economía financiera se aprenderán en la práctica, si no se sigue un camino más formal para hacerlo. Los mercados son maestros efectivos, aunque a veces crueles.

En general los sistemas financieros son autocorrectivos. En cada momento los participantes aprenden a utilizar los nuevos instrumentos y procedimientos para aumentar la riqueza, no exactamente para redistribuirla de unas manos a otras. Usualmente es mejor, en lugar de imponer regulaciones en forma prematura, esperar hasta que las fuerzas de la competencia estén preparadas para regular un mercado.

Muchas innovaciones financieras han sido posible por el notable avance de la tecnología de computación y comunicación. Aún más, el aumento de la competencia global ha tenido un papel importante, al producir una disminución del poder monopólico de organizaciones y gobiernos. No puedo dejar de pensar que los descubrimientos en la ciencia de la economía financiera han tenido una influencia importante en esto. Los contratos a futuro sobre índices proporcionan un ejemplo claro.

8. CONTRATOS A FUTURO SOBRE INDICES DE ACCIONES

CARACTERISTICAS. Un contrato a plazo tradicional es un acuerdo por parte del vendedor para entregar al comprador una cantidad establecida de una mercadería, en una fecha futura a un precio especificado. Un contrato a futuro es un contrato a plazo estandarizado, con la previsión adicional de que el precio de entrega se redefine al fin de cada día de transacción para hacerlo igual al precio al que se realizaron los nuevos contratos.

En el momento de cada redefinición una de las dos partes paga a la otra un monto igual a la diferencia entre el nuevo precio y el anterior. Este proceso se conoce como "reposición de margen" (posting variation margin) como resultado de "alinearse al mercado" (marking to market) el precio del contrato.

El vendedor de un contrato a futuro se dice que está corto en el contrato; el comprador se dice que está largo.

Las transacciones a futuro son posibles para las dos partes en un contrato, que no está "ligado". De este modo, A puede vender un contrato a B. Más tarde B puede venderlo a C sin que A intervenga. Y después C puede venderlo a A, extinguiéndolo antes de la fecha final de entrega.

Para proteger a la otra parte en estos acuerdos cada una debe depositar un colateral como "margen". No obstante, el monto necesario sólo cubre las pérdidas potenciales entre dos días de transacción, dado por el proceso de alinearse con el mercado. Un margen de 10% a 20% de los valores de una posición es suficiente. Para asegurar que se mantiene el colateral, preservando la estandarización del contrato, los intermediarios que representan a cada una de las posiciones utilizan un centro de compensación (clearing house), que asegura el cumplimiento de estas obligaciones.

Un contrato financiero a futuro puede caracterizarse por la entrega real del instrumento financiero estipulado, o de uno o más de un conjunto de tales instrumentos. Alternativamente, puede consistir sólo en el alineamiento final con el mercado en la fecha de entrega, con el pago de una de las partes a la otra de un monto igual a la diferencia en el día de entrega entre el precio a futuro contratado y el valor del instrumento financiero subyacente. Esto último también se denomina entrega de dinero (cash delivery).

Un contrato a futuro sobre índices de acciones (stock index futures contract) abarca una cartera especificada de acciones. Permite a los inversores tomar posiciones largas o cortas en carteras diversificadas. La mayoría de estos contratos prevén la entrega de dinero.

EFFECTOS. Un aspecto clave del contrato a futuro sobre índices es que se realiza sobre una cartera diversificada más que un título o mercadería individual. A este respecto, tal contrato es similar a un fondo mutuo o común (mutual fund, unit trust), un fondo combinado de índices (commingled index fund) o una opción sobre un índice. Todos proporcionan a los inversores "paquetes" de títulos, reduciendo sustancialmente los costos asociados con la diversificación. El aumento reciente de la confianza de los inversores en tales instrumentos es, al menos en parte, un testimonio de la influencia de la economía financiera en el proceso por el cual se asume el riesgo en las economías modernas.

En el presente contexto es de particular interés una segunda característica de estos contratos. Proporcionan un método eficiente para tomar simultáneamente una posición positiva en una cartera diversificada y una posición negativa en un título sin riesgo.

En efecto, el comprador del contrato toma prestado para comprar una cartera de acciones, mientras que el vendedor presta dinero y toma una posición corta en esa cartera (para más detalles puede verse, por ejemplo, Duffie, 1989). Si el comprador del contrato coloca títulos sin riesgo como margen con un valor igual al de su posición a futuro, el efecto neto es similar a invertir un monto comparable en las acciones del índice. Si se coloca menos del 100% de margen el efecto es igual a una compra de las acciones del índice financiada con endeudamiento. Una posición larga a futuro, si bien no es exactamente lo mismo que endeudarse a la tasa sin riesgo para comprar una cartera de acciones, puede proporcionar una aproximación bastante cercana a tal estrategia. Más aún, el límite superior en el endeudamiento implícito en el acuerdo es suficientemente grande para satisfacer hasta a los, potencialmente pocos, inversores con tolerancia muy alta al riesgo.

En el conjunto de inversiones del CAPM original la estrategia óptima para inversores con alta tolerancia al riesgo es financiar con endeudamiento una cartera muy diversificada (es decir, la cartera de mercado). Si bien los contratos financieros a futuro no se corresponden con la car-

tera de mercado, las combinaciones de contratos existentes pueden aproximar esa estrategia (incluyendo contratos sobre bonos y otros tipos de títulos).

En cierto sentido el vendedor de un contrato a futuro tiene posiciones negativas en los títulos subyacentes, y la existencia de tales posiciones es inconsistente con las consecuencias del CAPM. Sin embargo, cuando las examinamos con cuidado, las inconsistencias son más aparentes que reales. A veces el vendedor de un contrato a futuro sobre índices de acciones tiene también los títulos individuales que forman el índice. La posición a futuro proporciona una compensación contra cambios en el valor de la cartera de acciones reales.

Como resultado, la posición del vendedor a futuro compensado virtualmente es libre de riesgo, y por eso equivalente a invertir en un título sin riesgo. Tal persona puede reunir los títulos de una forma económica y, en efecto, proporciona un medio para que otros compren o vendan el paquete sin incurrir en los costos asociados con la compra o la venta de gran número de acciones individuales. En realidad, presta dinero a los inversores con alta tolerancia al riesgo para que puedan comprar montos adicionales de títulos con riesgo.

Los contratos a futuro sobre carteras diversificadas requieren un menor margen que el necesario para un conjunto de contratos sobre títulos individuales, cada uno con su margen requerido. También proporcionan economías de escala en las transacciones y registros.

Tales contratos proporcionan un medio para seguir estrategias deseables de inversión a aquellos que podrían estar limitados por las restricciones tradicionales sobre endeudamiento. Las estrategias son similares a las óptimas para inversores con alta tolerancia al riesgo en el CAPM original. De ahí que la existencia de estos contratos puede llevar a los mercados de capital reales más cerca de esa teoría simple del equilibrio, mejorando la eficiencia con que se distribuye el riesgo en la economía.

9. CONCLUSIONES

He considerado explícitamente sólo un tipo de impedimento para la distribución eficiente del riesgo. Este caso sirve como representativo de varios otros. Mientras mayores sean los costos y las restricciones asociados con la compra y venta de títulos, más lejos estará una economía del objetivo de asignar el riesgo a aquellos que están dispuestos a asumirlo.

Afortunadamente, los avances tecnológicos y la mayor comprensión de los principios de la economía financiera reducen a un ritmo rápido estos costos y restricciones. Como resultado, los mercados de capital se acercan a las condiciones supuestas en algunos de los tipos más simples de la teoría financiera. Y, algo mucho más importante: los esfuerzos combinados de teóricos, empíricos y prácticos han aumentado la eficiencia con la cual el riesgo se distribuye entre los individuos, llevando a un aumento de la riqueza social.

NOTAS ACLARATORIAS

[1] El rendimiento esperado de la cartera del inversor k está dado por

$$E_k = \sum_i x_{ik} E_i$$

donde

X_{ik} = proporción de la cartera del inversor k invertida en el título i

[2] La variancia de la cartera del inversor k está dada por

$$V_k = \sum_i \sum_j X_{ik} X_{jk} C_{ij}$$

donde

C_{ij} = covariancia entre los rendimientos de los títulos i y j

[3] Al incorporar U_k y la restricción de inversión completa en una función de Lagrange a maximizar obtenemos

$$Z_k = U_k + \lambda_{fk} (1 - \sum_i X_{ik})$$

Es claro que λ_{fk} es la utilidad marginal de la riqueza para el inversor k , ya que es igual a la derivada parcial de Z_k respecto a la riqueza del inversor (en nuestra expresión, el valor 1 en la restricción de inversión completa entre paréntesis, al ser X_{ik} valores expresados como proporciones de la riqueza total del inversor).

Recordemos que

$$E_k = \sum_i X_{ik} E_i \quad \text{y}$$

$$V_k = \sum_i \sum_j X_{ik} X_{jk} C_{ij}$$

Tomando la derivada parcial de Z_k con respecto a la tenencia del título i del inversor k se obtiene

$$\frac{\partial Z_k}{\partial X_{ik}} = E_i - \sum_j X_{jk} C_{ij} - \lambda_{fk}$$

Pero la covariancia del título i con cualquier cartera p será igual al promedio ponderado de las covariancias del título con los títulos de la cartera, utilizando las tenencias relativas en la cartera como ponderaciones. Así,

$$C_{ik} = \sum_j X_{jk} C_{ij}$$

Sustituyendo esta relación en la ecuación anterior y reordenando se obtiene la ecuación (2).

[4] Para derivar la ecuación (3) se comienza multiplicando todos los términos de la ecuación (2) por t_k ; reordenando queda

$$t_k E_i - 2 C_{ik} = t_k \lambda_{fk}$$

Ahora, multiplicamos todos los términos por W_k y sumamos para todos los inversores

$$\sum_k W_k t_k E_i - 2 \sum_k W_k C_{ik} = \sum_k W_k t_k \lambda_{fk}$$

Definamos t_m como

$$t_m \equiv \sum_k W_k t_k$$

Ahora consideremos el segundo término. Tengamos en cuenta que

$$C_{ik} = \text{Cov}(R_i, R_k)$$

donde

R_i = rendimiento del título i

R_k = rendimiento de la cartera del inversor k

Por las propiedades de la covariancia

$$S_k W_k C_{ik} = \text{Cov}(R_i, S_k W_k R_k)$$

Pero la suma en el lado derecho simplemente es el promedio ponderado patrimonial de los rendimientos de las carteras de los inversores o, de modo más simple, el rendimiento de la cartera de mercado. Por eso la suma del lado izquierdo es la covariancia del rendimiento del título i con el de la cartera de mercado, que podemos indicar C_{im} .

Haciendo las sustituciones y dividiendo todos los términos con t_m se obtiene

$$E_i - \frac{2}{t_m} C_{im} = \frac{S_k W_k t_k \beta_{fk}}{t_m}$$

El último término es un promedio ponderado de los valores de β_{fk} para los K inversores, con las ponderaciones resultantes del producto de W_k y t_k . Si llamamos a esto β_{fm} obtenemos la ecuación (3).

[5] Tomando los valores esperados de ecuación (9) se tiene

$$E_i = a_i + \beta_{im} E_m$$

La comparación con ecuación (8) implica que

$$a_i = (1 - \beta_{im}) R_f$$

[6] Para probar la separación en este caso rescribamos la ecuación (2) del siguiente modo

$$S_j \sum C_{ij} x_{jk} + t_k \beta_{fk} = t_k E_i$$

La optimización de cartera requiere que esta relación se satisfaga para cada uno de los N títulos, y que se cumpla la restricción de inversión completa. Por esto tenemos un conjunto de N+1 ecuaciones simultáneas que puede expresarse

$$\begin{array}{cccccccc} + & & + & + & + & + & + & + \\ | & 2 C_{11} & \dots & \dots & 2 C_{1N} & 1 | & | X_{1k} | & | 0 | & | E_1 | \\ | & \cdot & & & \cdot & | & \cdot & | & \cdot & | \\ | & \cdot & & & \cdot & | & \cdot & | & \cdot & | \\ | & 2 C_{N1} & \dots & \dots & 2 C_{NN} & 1 | & | X_{Nk} | & | 0 | & | E_N | \\ | & 1 & \dots & \dots & 1 & 0 | & | \beta_{fk}^* | & | 1 | & | 0 | \\ + & & & & + & + & + & + & + & + \end{array}$$

donde β_{fk}^* representa $t_k \beta_{fk}$. Si escribimos en notación matricial:

$$DY = K + t_k F$$

La solución se obtiene multiplicando ambos lados por la inversa de D:

$$Y = \{D^{-1} K\} + t_k \{D^{-1} F\}$$

Se advierte que la cartera óptima es una función lineal de t_k . Entonces, puede establecerse como una función lineal de dos vectores cualesquiera que satisfacen la ecuación anterior con diferentes valores de t_k .

[7] Multiplicando la ecuación (13) por x_{im} y sumando para i obtenemos

$$E_m = \frac{2 V_m}{t_m} - \beta_{mm} - \sum_i x_{im} z_{im}$$

Al reordenar los términos se obtiene la ecuación (15).

[8] Para que todos los títulos en la cartera de mercado tengan la misma utilidad marginal se requiere que

$$E_i - (2/t) C_{im} = ?$$

donde t y $?$ son constantes positivas.

Reordenando, y reemplazando C_{im} por el valor equivalente expresado en términos de β_{im}

$$E_i = ? - \frac{2 V_m}{t} \beta_{im}$$

Para que se cumpla la condición de eficiencia de la cartera de mercado debe existir una relación lineal estricta entre E_i y β_{im} . Más aún, la intersección y la pendiente deben ser positivas; de otro modo, los valores implícitos de $?$ y t , respectivamente, serán negativos.

REFERENCIAS

- ARROW, K., Le role des valeurs boursieres pour la repartition la meilleure des risques, *Econometrie, Colloques Internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique*, Paris 1953, v.XI, 41/47
- BLACK, F., Capital market equilibrium with restricted borrowing, *Journal of Business*, 1972, v.45, 444/454
- BLACK, F. & SCHOLES, M., The pricing of options and corporate liabilities, *Journal of Political Economy*, 1973, v.81, 637/654
- BREEDEN, D., An intertemporal asset pricing model with stochastic consumption and investment oportunities, *Journal of Financial Economics*, 1979, v.7, 265/296
- BRENNAN, M.J., Taxes, market valuation and corporate financial policy, *National Tax Journal*, December 1970, 417/427
- COX, J., ROSS, S. & RUBINSTEIN, M., Option pricing: a simplified approach, *Journal of Financial Economics*, 1979, v.7, 229/263
- DEBREU, G., *Theory of value*, Wiley, New Jersey, 1959
- DUFFIE, d., *Futures markets*, Prentice Hall, New Jersey, 1989
- GLENN, D., Super premium security prices and optimal corporate financing decisions, *Journal of Finance*, 1976, v.31, 507/524
- KRAUS, A. & LITZENBERGER, R., Skewness preference and the valuation of risk assets, *Journal of Finance*, 1976, v.38, 1085/1100
- LEVY, H., Equilibrium in an imperfect market: a constraint on the number of securities in a

- portfolio, *American Economic Review*, 1978, v.68, 643/658
- LEVY, H. & MARKOWITZ, H., Approximating expected utility by a function of mean and variance, *American Economic Review*, 1979, v.69, 308/317
- LINTNER, J., The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets, *Review of Economics and Statistics*, 1965, v.47, 13/37
- LINTNER, J., The aggregation of investors' diverse judgements and preferences in purely competitive markets, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 1969, v.4, 346/382
- MARKOWITZ, H., Portfolio selection, *Journal of Finance*, 1952, v.7, 77/91
- MARKOWITZ, H., The optimization of a quadratic function subject to linear constraints, *Naval Research Logistics Quarterly*, 1956, v.3, 111/133
- MARKOWITZ, H., *Portfolio selection: efficient diversification of investments*, Wiley, New Jersey, 1959
- MARKOWITZ, H., *Mean-variance analysis in portfolio choice and capital markets*, Blackwell, New York, 1987
- MARKOWITZ, H., Risk adjustment, *Journal of Accounting, Auditing and Finance*, 1990 (de próxima publicación)
- MERTON, R., An intertemporal capital asset pricing model, *Econometrica*, 1973, v.41, 867/887
- MERTON, R., A simple model of capital market equilibrium with incomplete information, *Journal of Finance*, 1987, v.52, 483/510
- MODIGLIANI, F. & MILLER, M., The cost of capital, corporation finance and the theory of investment, *American Economic Review*, 1958, v.48, 261/297
- MOSSIN, J., Equilibrium in a capital asset market, *Econometrica*, 1966, v.35, 768/783
- ROSS, S., Arbitrage theory of capital asset pricing, *Journal of Economic Theory*, 1976, v.13, 341/360
- RUBINSTEIN, M., An aggregation theorem for securities markets, *Journal of Financial Economics*, 1974, v.1, 225/244
- SHARPE, W., *Portfolio analysis based on a simplified model of the relationships among securities*, PhD Dissertation, University of California at Los Angeles, 1961
- SHARPE, W., A simplified model for portfolio analysis, *Management Science*, 1963, v.9, 277/293
- SHARPE, W., Capital asset prices: a theory of market equilibrium under conditions of risk, *Journal of Finance*, 1964, v.19, 425/442
- SHARPE, W., *Portfolio theory and capital markets*, McGraw Hill, New York, 1970
- SHARPE, W., *Investments*, Prentice Hall, New Jersey, 1978
- SHARPE, W., Factor models, CAPMs and the APT, *Journal of Portfolio Management*, Fall 1984, 21/25
- TOBIN, J., Liquidity preference as behavior towards risk, *Review of Economics Studies*, 1959, v.25, 65/86
- VON NEUMANN, J. & MORGENSTERN, O., *Theory of games and economic behavior*, Princeton University Press, 1944