

DOCENTES DE ADMINISTRACIÓN FINANCIERA

**XXXIV Jornadas Nacionales de Administración Financiera
Septiembre 2014**

**VALUACIÓN DE OPCIONES FINANCIERAS:
VOLATILIDAD, PROBABILIDADES
IMPLÍCITAS Y MOMENTOS ESTOCÁSTICOS
DE ORDEN SUPERIOR
Un método sencillo para su estimación**

**Carlos A. Ferreira
Gastón S. Milanesi**

Universidad Nacional del Sur

SUMARIO: 1. Introducción: volatilidad y probabilidades implícitas en la valoración de opciones; 2. Volatilidades implícitas (VI) y probabilidades implícitas (PI); 3. Conclusiones.

Para comentarios: ferreira@uns.edu.ar; milanesi@uns.edu.ar

Resumen

El objetivo del presente trabajo consiste en desarrollar una simple metodología para estimar la volatilidad implícita (VI) y probabilidades implícitas (PI), con el fin de incorporar momentos estocásticos de orden superior en el proceso de valuación de opciones financieras. La estructura es la siguiente: primero son explicados la serie de pasos necesarios para estimar VI en los contratos de opciones. Seguidamente se exponen una simple metodología para la estimación de probabilidades implícitas. Para ello es menester en primer término proyectar la clásica rejilla binomial del subyacente y seguidamente el modelo con restricciones para estimar PI. Con el fin de ilustrar el funcionamiento de la metodología propuesta se usará como caso de aplicación contratos de opciones financieras de compra sobre la especie APBR (Petróleo Brasileiro S.A-Petrobras) negociado en el mercado de capitales argentino. La estimación de VI y PI se

realizan utilizando las herramientas del menú *Datos, Buscar Objetivo y Solver del aplicativo Microsoft Excel* ®. Finalmente se presentan las principales conclusiones.

1. Introducción: volatilidad y probabilidades implícitas en la valoración de opciones

Los tradicionales modelos de valoración de opciones Black-Merton-Scholes (BMS) (Black, Scholes, 1972; Black, Scholes, 1973; Merton, 1973) y el modelo binomial (CRR) (Cox, Ross, 1976; Cox, Ross, Rubinstein, 1979) suponen un proceso estocástico del tipo geométrico browniano respecto de la evolución del valor correspondiente al subyacente: binomial en tiempo discreto y lognormal cuando el comportamiento de la variable aleatoria se supone continuo. La media y desvío, primer y segundo momento estocástico, son insumos suficientes en la proyección del futuro valor. Sin embargo muchos fenómenos, entre ellos el comportamiento de los precios correspondientes a los activos financieros, no se ajustan al comportamiento normal señalado (Taleb, 2007) incorporando momentos estocásticos de orden superior (asimetría y curtosis). Esto constituye una importante limitación de los modelos BMS y su versión en tiempo discreto CRR.

Con el fin de incorporar asimetría y curtosis, sin sacrificar la elegancia y simplicidad de los modelos BMS y CRR es menester trabajar con dos conceptos: volatilidad implícita (VI) y probabilidades implícitas (PI).

La volatilidad en los rendimientos de un activo financiero constituye una de las variables fundamentales en el clásico modelo de BMS para estimar el valor teórico de una opción financiera. La importancia de la volatilidad reside en su capacidad para explicar y fundamentar la magnitud e incidencia temporal de las variaciones en el precio de la opción frente a variaciones en el precio en el subyacente. La volatilidad no es una variable directamente observable, a diferencia de un precio de mercado, requiriendo de métodos y técnicas para su estimación. En función de la metodología de estimación seleccionada la volatilidad puede clasificarse en: histórica (observada), implícita, proyectada y de cobertura. La volatilidad denominada actual es propiamente el parámetro σ en el modelo de BMS. Al no ser observada directamente en el mercado se la estima mediante modelos estadísticos. La volatilidad histórica se obtiene a partir de observaciones históricas de precios brindando una medida estadística del riesgo del subyacente. La volatilidad implícita es el valor del parámetro σ en la ecuación de BS. Esta surge de un proceso de iteración en donde se iguala el valor teórico con el precio de mercado observado del subyacente. La volatilidad proyectada, a partir de la volatilidad implícita, es un pronóstico calculado mediante modelos econométricos. La volatilidad de cobertura (*hedging volatility*) es el valor del parámetro σ en la estimación de la letra griega delta, con el fin de estimar las unidades de subyacente a vender en corto con propósitos de cobertura (Wilmott, P, 2009). Alternativamente la volatilidad puede estimarse a partir de un intervalo de valores - utilizando técnicas de escenarios o sensibilidad, o empleando modelos fuzzy (Datar, Mathews, 2004; Datar, Mathews, Johnson, 2007; Collan, Fullér, Mezei, 2009; Zdnek, 2010).

Respecto de las probabilidades implícitas (PI), los primeros trabajos se remontan a las primeras investigaciones relativas a inferir las probabilidades que corresponde a preferencias neutrales al riesgo y precios de estados contingentes a partir de las opciones (Ross, 1976; Breeden, Litzenberger, 1978) A partir de estas ideas se propusieron métodos para estimar las probabilidades implícitas finales correspondiente a neutralidad al riesgo de las rejillas estocásticas y el proceso estocástico implícito a través del precio de las opciones (Shimko, 1993; Rubinstein, 1994; Rubinstein, 1998; Arnold, Crack, Schwartz, 2004).

El aporte del modelo conocido como *Implied Binomial Tree* (IBT) reside en que posibilita trabajar con los cuatro primeros momentos estocásticos, debido a que infiere las probabilidades de ocurrencia a partir de los precios correspondientes al derivado financiero. La valora-

ción basada en probabilidades implícitas, al trabajar con la información contenida en los precios de las opciones, recoge e incorpora las expectativas del mercado vinculadas al proceso estocástico supuesto por los agentes.

La secuencia lógica de pasos a seguir para la estimación de las VI y PI es la siguiente:

- a. El principal insumo está dado por el precio de mercado correspondiente a opciones financieras negociadas con el mismo vencimiento y sobre el subyacente.
- b. La volatilidad se estima de forma implícita en base al clásico modelo BMS.
- c. Es proyectado el proceso estocástico del activo empleando los parámetros CRR con la volatilidad implícita obtenida en el paso anterior.
- d. Se emplea un argumento iterativo de optimización para valorar opciones con el mínimo error y calibrar las PI.

El objetivo del presente trabajo consiste en determinar PI correspondientes a nodos terminales Q_j^* con el fin de valorar la opción y establecer las diferencias con el método CRR. La estructura es la siguiente: en primer lugar se desarrollan los pasos para estimar la volatilidad implícita en los contratos de opciones. Seguidamente se presenta la serie de pasos para estimar las probabilidades implícitas: primero la construcción de la rejilla binomial y seguidamente el modelo con restricciones para estimar PI. Para ilustrar el funcionamiento de los modelos se valorará una serie de contratos de opciones financieras de compra sobre la especie APBR (Petróleo Brasileiro S.A-Petrobras) negociado en el mercado de capitales argentino, con fecha 1 de abril del 2014. La estimación de VI y PI se realizan utilizando las herramientas del menú *Datos, Buscar Objetivo y Solver del aplicativo Microsoft Excel* ®. Finalmente se presentan las principales conclusiones.

2. Volatilidades implícitas (VI) y probabilidades implícitas (PI)

2.1 Caso de aplicación.

Como caso de estudio fue seleccionada la acción correspondiente a la firma Petróleo Brasileiro SA- Petrobras (Sociedad de Economía Mixta), negociada en el mercado de capitales argentino. La fecha de vencimiento 16/04/2014, el plazo a considerar es de 15 días. La tasa libre de riesgo aplicada como insumo del modelo es BAIBAR¹: 9,97% anual y se analizan opciones de compra que no paga dividendos, con diferentes precios de ejercicio pactados: \$ 62,40, \$ 66,40, \$ 70,40 y \$ 74,40. El valor spot es \$ \$ 65,50. Los datos fueron obtenidos del Instituto Argentino de Mercado de Capitales, reporte diario fecha 1/4/2014, se exponen a continuación en el siguiente cuadro.

Cuadro 1 Precio de ejercicio, tasa libre de riesgo anual, precio de compra-venta y valor medio

Precio Ejercicio	\$ 62,40	\$ 66,40	\$ 70,40	\$ 74,40
Ask Price (compra)	\$ 4,30	\$ 2,40	\$ 0,67	\$ 0,30
Bid Price (venta)	\$ 4,00	\$ 1,90	\$ 0,67	\$ 0,25
<i>Call medio</i>	\$ 4,15	\$ 2,15	\$ 0,67	\$ 0,28

¹Baibar: correspondiente a las operaciones hasta 15 días de plazo concertadas entre entidades bancarias privadas no comprometidas en proceso de fusión o reestructuración. (BCRA)

2.2 Pasos para estimar la volatilidad implícita (VI)

Se utiliza un proceso iterativo igualando el precio de mercado observado y el valor teórico obtenido por el modelo BMS. Primero se estima el valor teórico de la opción según el modelo BMS. Luego se itera con el fin de despejar la volatilidad, suponiendo que el valor de mercado es correcto y explicado por el modelo BMS.

Determinación del valor teórico con el modelo BMS: calcular el valor teórico de una opción de compra europea que no paga dividendos empleando el modelo de BMS;

$$c = [S_0 N(d_1)] - [X e^{-r t} N(d_2)] \quad Ec 1$$

$$d_1 = \frac{\ln(S/X) + [r + (\sigma^2/2)]t}{\sigma \sqrt{t}} \quad Ec 2$$

$$d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{t} \quad Ec 3$$

En este caso, S es el precio del subyacente, X el precio de ejercicio, $N(d_1)$ y $N(d_2)$ los coeficientes de probabilidad en el dinero de la ecuación, r el tipo sin riesgo, t el horizonte temporal y σ la volatilidad.

Estimación de la volatilidad implícita (VI): se itera la variable objetivo (volatilidad implícita) para arribar al valor más ajustado posible relacionando el valor teórico y el valor de mercado obtenido, de la siguiente manera²:

- Se define la celda objetivo considerando que reflejará el ajuste máximo entre el precio obtenido de mercado y el valor teórico obtenido mediante el modelo de BMS.
- Establecer el precio al cual debe arribar, esto es el valor medio entre valor de compra (*ask*) y el valor de venta (*bid*) obtenidos en el mercado para cada contrato vigente.
- La variable (incógnita) por la cual se aplica este procedimiento es la volatilidad implícita, parámetro que se somete al mencionado proceso de iteración.
- Iteración, cuando el valor obtenido por la ecuación BMS es coincidente con el valor medio mencionado en *b*. Así se logra minimizar la diferencia entre precio observado y precio teórico.

Los datos correspondientes al modelo BMS, valor de mercado medio, ajuste a valor teórico y volatilidad implícita son expuestos en el siguiente cuadro:

Cuadro 2: Parámetros modelo BMS y VI

Call medio	\$ 4,15	\$ 2,15	\$ 0,67	\$ 0,28
d_1	0,6929037	-0,0555432	-0,7690121	-1,2778236
d_2	0,6123326	-0,1489441	-0,8529193	-1,3709304
Teórico (BMS)	\$ 4,15	\$ 2,15	\$ 0,67	\$ 0,28
Ajuste	0,00	0,00	0,00	0,02
VI (σ)	39,7%	46,1%	41,4%	45,9%

² El proceso iterativo se realiza con la función *Buscar Objetivo de Microsoft Excel* ®

2.3 Procedimiento para estimar probabilidades implícitas (PI)

Para el cálculo de las PI primero deben proyectarse el recorrido binomial clásico del precio correspondiente al subyacente en cuestión y valorar la opción aplicando el modelo CRR. Con la información recolectada se está en condiciones de inferir PI.

El modelo binomial (CRR) y las probabilidades explícitas: Con los datos disponibles se está en condición de obtener los parámetros para la construcción de la rejilla binomial; (Cox y Ross 1976; Cox, *et.al.*, 1979):

$$u = \exp^{\sigma \sqrt{t/n}} \quad \text{Ec 4}$$

$$d = \exp^{-\sigma \sqrt{t/n}} \quad \text{Ec 5}$$

$$p = \frac{r-d}{u-d} \quad \text{Ec 6}$$

$$\text{Disc} = \exp^{-r(t/n)} \quad \text{Ec 7}$$

Los coeficientes de ascenso (u), descenso (d) y probabilidades equivalentes ciertas (p , $1-p$) fueron estimados a partir de la volatilidad implícita correspondiente al precio de ejercicio ($X = \$66,4$), más cercano a la situación “en el dinero” de la opción. En el siguiente cuadro se detalla la información:

Cuadro 3: Parámetros rejilla binomial CRR

Parámetros	
σ	39,745%
u	1,0258
d	0,9748
r	1,0004
p	0,5017
$1-p$	0,4983
Disc	0,9959
$\text{Disc } p$	0,9996

La rejilla binomial es el resultado de proyectar los movimientos de ascenso y descenso sobre el valor del subyacente por cada paso en los que se alcanza el horizonte temporal, empleando la siguiente expresión,

$$S_{ijt} = [S_{ij t-1} u; S_{ij t-1} d] \quad \text{Ec 8}$$

El procedimiento de valuación de opciones puede sistematizarse en los siguientes pasos: (meter opciones reales)

- Estimar el valor al vencimiento de la opción de compra (c_t) aplicando la expresión (S precio del subyacente y X precio de ejercicio al vencimiento $t=10$)

$$c_t = [\text{Max}(S_t - X); 0] \quad \text{Ec 9}$$

- b. Calcular probabilidades asociadas a los nodos terminales (n cantidad total de pasos, j números correspondientes a cada combinación, p probabilidad equivalente cierta de éxito, $1-p$ su complemento)

$$Q_j = \frac{n!}{j!(n-j)!} [p^j (1 - p)^{n-j}] \tag{Ec 10}$$

- c. El valor actual del subyacente resulta de la sumatoria entre los productos de los valores terminales ajustados por su probabilidad de ocurrencia y actualizados por el factor de descuento (S_{tj} valor que el subyacente asume en cada nodo final y Q_{tj} probabilidad obtenida en el paso b)

$$S_0 = \left[\sum_{j=0}^n S_{tj} Q_{tj} \right] \times Disc \tag{Ec 11}$$

- d. El valor de la opción (c_0) es la sumatoria de los productos entre el valor al vencimiento del derivado (ecuación 9) y la probabilidad correspondiente a cada nodo final Q_{jt} (ecuación 10). Los valores son actualizados a la tasa de interés libre de riesgo o factor de descuento ($Disc$) (ecuación 12),

$$c_0 = \left[\sum_{j=0}^n c_{tj} Q_{tj} \right] \times Disc \tag{Ec 12}$$

En el siguiente cuadro se presentan los valores terminales correspondientes al subyacente, obtenido mediante el método binomial con coeficientes de probabilidad equivalentes ciertos (ecuación 8). Adicionalmente se exponen las probabilidades de ocurrencia para cada nodo (ecuación 10) y el valor ajustado actualizado. La sumatoria es igual al precio del subyacente (ecuación 11).

Cuadro 4: Valor subyacente probabilidades explícitas (ecuaciones 8, 10, 11 y 12)

Nodos	$S_{jt} = [S_{jt-1} \times u; S_{jt-1} \times d]$	$Q_j = \frac{n!}{j!(n-j)!} [p^j (1-p)^{n-j}]$	$S_0 = \left[\sum_{j=0}^n S_{tj} \times Q_{tj} \right] \times Disc$
10	\$ 84,51	0,10097%	\$ 0,0850
9	\$ 80,31	1,00298%	\$ 0,8022
8	\$ 76,32	4,48334%	\$ 3,4077
7	\$ 72,53	11,87588%	\$ 8,5781
6	\$ 68,92	20,64427%	\$ 14,1707
5	\$ 65,50	24,60800%	\$ 16,0523
4	\$ 62,25	20,36998%	\$ 12,6276
3	\$ 59,15	11,56240%	\$ 6,8116
2	\$ 56,21	4,30700%	\$ 2,4113
1	\$ 53,42	0,95073%	\$ 0,5058
0	\$ 50,77	0,09444%	\$ 0,0477
$c_0 = \left[\sum_{j=0}^n c_{tj} \times Q_{tj} \right] \times Disc$			\$ 65,50

En el cuadro 5 se presentan, para los precios de ejercicios correspondientes a los contratos estudiados, los valores terminales en cada nodo (ecuación 9), el valor de compra (*ask*), venta (*bid*) y el valor teórico estimado (ecuación 12). En las dos últimas filas las diferencias entre

precios de mercados (bid-ask) y teóricos (CRR) surgen de: $Dif Ask = callask - C_{CRR}$; $Dif Bid = C_{CRR} - callbid$.

Cuadro 5: Valores terminales, precios de compra-venta, valor teórico de la opción y diferencias

Ejercicio	\$ 62,40	\$ 66,40	\$ 70,40	\$ 74,40
10	\$ 0,0223	\$ 0,0183	\$ 0,0142	\$ 0,0102
9	\$ 0,1796	\$ 0,1395	\$ 0,0994	\$ 0,0593
8	\$ 0,6240	\$ 0,4447	\$ 0,2654	\$ 0,0860
7	\$ 1,2027	\$ 0,7277	\$ 0,2527	
6	\$ 1,3469	\$ 0,5211		
5	\$ 0,7628			
4				
3				
2				
1				
0				
Ask Price	\$ 4,30	\$ 2,40	\$ 0,67	\$ 0,30
Bid Price	\$ 4,00	\$ 1,90	\$ 0,67	\$ 0,25
C_t (CRR)	\$ 4,12	\$ 1,84	\$ 0,63	\$ 0,15
Dif Ask	\$ 0,1785	\$ 0,5563	\$ 0,0409	\$ 0,1451
Dif Bid	\$ 0,1215	\$ -0,0563	\$ -0,0409	\$ -0,0951

El valor teórico escapa del precio de compra-venta pactado en el mercado, sobre todo en los casos de aquellas opciones más fuera del dinero. Esto es así debido a que el método CRR supone normalidad en el comportamiento estocástico del activo.

Probabilidades implícitas (PI): Las probabilidades de ocurrencia son inferidas a partir de los precios observados en el mercado del derivado financiero en cuestión. Consecuentemente la valoración basada en PI estará condicionada por el conjunto de expectativas del mercado vinculadas al proceso estocástico que se espera en el activo subyacente (Milanesi, 2013; Milanesi, Tohmé, 2014). Su instrumentación requiere aplicar una secuencia lógica de instancias partiendo de los precios observados en los activos financieros (Arnold *et.al*, 2004); (Milanesi, 2013)³. A continuación se detallan las etapas de cálculo de PI:

Primero: insumos para la construcción de la rejilla binomial implícita:

- Contratos de opciones con diferentes precios de ejercicio sobre el mismo subyacente:* conjunto de opciones financieras negociadas con el mismo vencimiento y sobre el subyacente.
- Riesgo implícito:* la volatilidad se estima de forma implícita empleando el modelo BMS. Se selecciona la opción que se encuentra más cercana al estado “en el dinero”.
- Proceso estocástico binomial CRR:* se proyecta el proceso estocástico del activo subyacente utilizando parámetros u , d y p estimados a partir de la volatilidad implícita del

³ Para la construcción del algoritmo de iteración se utilizó la función *Solver de Microsoft Excel* ®.

punto anterior. La derivación del proceso estocástico del subyacente se realiza aplicando el tradicional modelo CRR.

Segundo: definidas las variables de entrada se debe construir el conjunto de ecuaciones y restricciones.⁴ Esta es la base empleada para valorar todas las opciones negociadas con el mínimo error. Para ello se debe emplear un argumento iterativo de optimización. El objetivo del mismo consiste en establecer las probabilidades implícitas asociados a los precios probables del activo subyacente en los nodos finales obtenidos con el proceso CRR (punto c). La probabilidad asociada a los nodos finales se denomina Q_j^* , y esta es obtenida con las siguientes restricciones:

Restricción 1: Minimizar la diferencia entre probabilidades explícitas e implícitas.

$$error = \sum_{j=0}^N [Q_j - Q_{*j}]^2 \quad Ec 13$$

Q_j es la probabilidad del nodo final obtenida con el método CRR y Q_{*j} es la probabilidad implícita, correspondiente a un precio que experimenta j movimientos ascendentes, $n-j$ descendentes.

Restricción 2: Este es el resultado a obtener, el cambio de probabilidades. La restricción impuesta indica que la suma de las probabilidades implícitas debe ser igual a uno.

$$\sum_{j=0}^N Q_{*j} = 1 \quad Ec 14$$

Las probabilidades implícitas⁵ siempre son una magnitud positiva para todos los nodos (desde j hasta n)

Restricción 3: valor de mercado del subyacente igual a

$$S_0 = \left[\sum_{j=0}^n S_{tj} Q_{*tj} \right] \times Disc \quad Ec 15$$

S_{ij} es el precio del activo en el paso n -ésimo (luego de j y $n-j$ alzas y bajas). La diferencia entre el precio observado en el mercado para el subyacente, y el valor intrínseco debe ser cero (*Spot implícito* – *Spot observado* = 0). El valor spot implícito se obtiene de la sumatoria de los precios finales nodales multiplicados por la probabilidad implícita de ocurrencia (Q_{*j}) actualizados por el factor de descuento

Restricción 4: La diferencia entre el valor de la opción teórico estimado con probabilidades implícitas para cada precio de ejercicio y el precio de compra (*ask*); *difask* = *cask* – *cIBT* debe ser mayor o igual a cero. Similar restricción se aplica para el precio de venta (*bid*) *difbid* = *cIBT* – *cask*. El precio teórico del call (*cIBT*) es determinado empleando la siguiente ecuación;

$$c_0 = \left[\sum_{j=0}^n c_{tj} Q_{*tj} \right] \times Disc \quad Ec 16$$

⁴ Las restricciones en el menú Solver son: establecer celda objetivo (sumatoria valor actuales subyacente); cambiando las celdas de las variables (columna de probabilidades implícitas), sujeto a las siguientes restricciones: a) la fila correspondiente a la diferencia *precio compra-valor teórico* sea ≥ 0 ; b) la fila correspondiente a la diferencia *valor teórico-precio de venta* sea ≥ 0 ; c) diferencia entre el precio spot implícito menos el observado = 0; d) los valores correspondientes a las celdas a cambiar (columna de probabilidades implícitas) sea $\geq 0,0000001$; e) la sumatoria de las PI para cada nodo (columna de probabilidades implícitas) sea = 1.

⁵ Es incorrecto hacer referencias a probabilidades implícitas nodales debido a que estas corresponden a los arcos del árbol binomial y no a los nodos.

En el método PI los momentos superiores del mercado, asimetría y curtosis, son capturados, debido a que la restricción 4 pretende que los precios estén en la cota que marca los valores de compra-venta.

En el cuadro 6 se presentan los resultados correspondientes a las probabilidades nodales explícitas Q (CRR), implícitas Q'(PI) (el resultado del conjunto de celdas a cambiar, restricción 2) y el error (el resultado minimizar las diferencias al cuadrado entre Q(CRR) y Q'(PI) restricción 1).

Cuadro 6: Probabilidades explícitas, PI, y error

Nodos	Q(CRR)	Q'(PI)	Error
10	0,10097%	1,87548%	0,000315
9	1,00298%	0,46966%	0,000028
8	4,48334%	1,75673%	0,000743
7	11,87588%	12,11067%	0,000006
6	20,64427%	23,23675%	0,000672
5	24,60800%	23,52870%	0,000116
4	20,36998%	19,65513%	0,000051
3	11,56240%	11,19720%	0,000013
2	4,30700%	4,27123%	0,000000
1	0,95073%	1,22815%	0,000008
0	0,09444%	0,67031%	0,000033
Σ	100,00%	100,00%	0,20%

Tercero: Estimadas las probabilidades implícitas, el proceso de valuación sigue su curso tradicional conforme fue expuesto para el modelo CRR. La valuación de la opción de compra emerge del valor actual de la sumatoria de los precios terminales, ajustados por su probabilidad de ocurrencia implícita. La metodología es similar a la usada con equivalentes ciertos. A diferencia del método indicado en este caso se utilizan las probabilidades implícitas obtenidas en el segundo paso. En el cuadro 7 se expone el cálculo del valor actual correspondiente al precio spot.

En el cuadro 8 se muestran los diferenciales entre el precio teórico y los precios de compra venta en el mercado. El valor teórico obtenido mediante PI es acotado por los valores máximos y mínimos de negociación (restricción 4).

A diferencia del modelo CRR trabajar con probabilidades implícitas limita el precio a los precios de compra-venta (*bid-ask*) capturando el tercer (asimetría) y cuarto (curtosis) momento estocástico. La no normalidad está reflejada en los precios, aunque los tradicionales modelos no contemplan dicha situación, por lo tanto, sin perjuicio de su amplia difusión y evidente simplicidad, carecen de capacidad para explicar íntegramente el precio. En el siguiente gráfico se ilustra la distribución de probabilidades correspondientes a los 11 nodos finales en el periodo $t=10$, estimadas con el modelo binomial (CRR) y probabilidades implícitas (PI).

En el gráfico 1 se aprecia que las PI presentan leve sesgo y curtosis positiva diferenciándose de las probabilidades explícitas del modelo binomial. Las PI capturan el tercer y cuarto momento estocástico ya que ajustan el valor teórico a los precios de compra-oferta (*ask-bid*) del derivado, conforme surge en el gráfico 2.

Cuadro 7: Valor subyacente probabilidades implícitas (ecuaciones 14, 15 y 16)

Nodos	$S_{jt} = [S_{jt-1} \times u; S_{jt-1} \times d]$	Q^*_j	$S_0 = \left[\sum_{j=0}^n S_{tj} \times Q_{tj} \right] \times Disc$
10	\$ 84,51	1,87548%	\$ 1,5784
9	\$ 80,31	0,46966%	\$ 0,3756
8	\$ 76,32	1,75673%	\$ 1,3352
7	\$ 72,53	12,11067%	\$ 8,7476
6	\$ 68,92	23,23675%	\$ 15,9503
5	\$ 65,50	23,52870%	\$ 15,3483
4	\$ 62,25	19,65513%	\$ 12,1845
3	\$ 59,15	11,19720%	\$ 6,5964
2	\$ 56,21	4,27123%	\$ 2,3912
1	\$ 53,42	1,22815%	\$ 0,6534
0	\$ 50,77	0,67031%	\$ 0,3389
$c_0 = \left[\sum_{j=0}^n c_{tj} \times Q_{tj} \right] \times Disc$			\$ 65,5000

Cuadro 8: Valores terminales, precios de compra-venta, valor teórico de la opción y diferencias

Ejercicio	\$ 62,40	\$ 66,40	\$ 70,40	\$ 74,40
10	\$ 0,4146	\$ 0,3396	\$ 0,2646	\$ 0,1896
9	\$ 0,0841	\$ 0,0653	\$ 0,0465	\$ 0,0278
8	\$ 0,2445	\$ 0,1743	\$ 0,1040	\$ 0,0337
7	\$ 1,2265	\$ 0,7421	\$ 0,2577	–
6	\$ 1,5160	\$ 0,5865	–	–
5	\$ 0,7294	–	–	–
4	–	–	–	–
3	–	–	–	–
2	–	–	–	–
1	–	–	–	–
0	–	–	–	–
Ejercicio	\$ 62,40	\$ 66,40	\$ 70,40	\$ 74,40
<i>Ask Price</i>	\$ 4,30	\$ 2,40	\$ 0,67	\$ 0,30
<i>Bid Price</i>	\$ 4,00	\$ 1,90	\$ 0,67	\$ 0,25
C_tPI	\$ 4,20	\$ 1,90	\$ 0,67	\$ 0,25
<i>Dif Ask</i>	\$ 0,1021	\$ 0,5000	\$ 0,0000	\$ 0,0500
<i>Dif Bid</i>	\$ 0,1979	\$ -0,0000	\$ -0,0000	\$ -0,0000

Ilustración 1: Distribución de probabilidades nodos finales

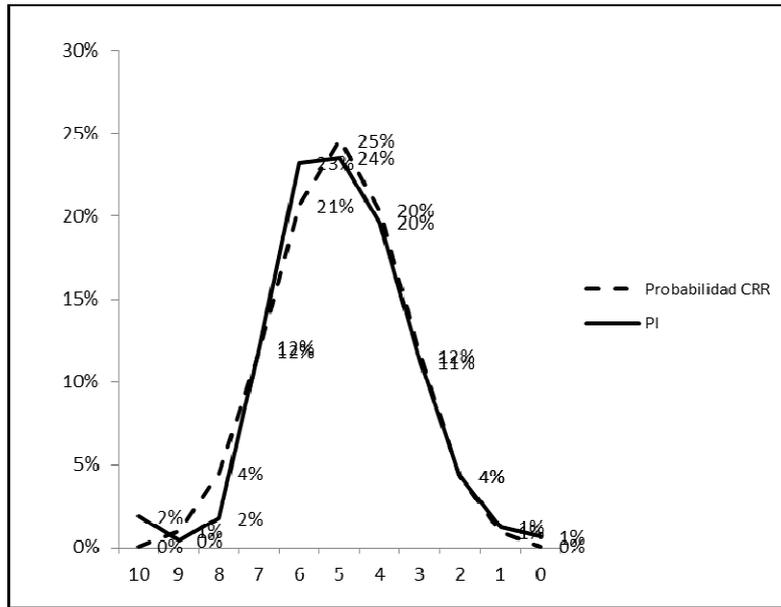
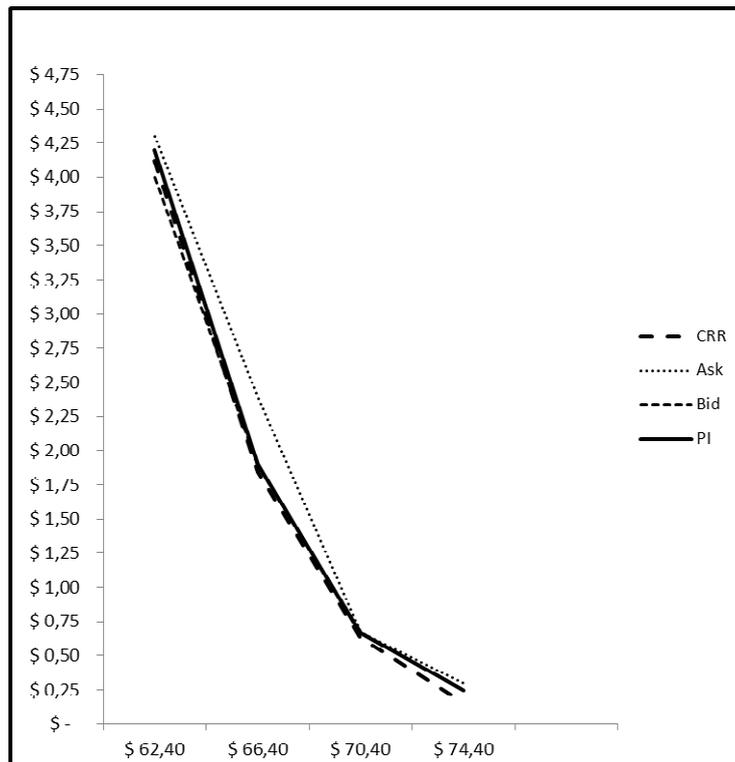


Ilustración 2: Valor prima teórica CRR, PI y precios ask-bid



La cuarta restricción en el modelo es la condición para que la salida del mismo sea la distribución de probabilidad en los nodos finales, incorporando asimetría y curtosis contenidas en las expectativas de los agentes.

3. Conclusiones

Suponer que el precio de los activos financieros se ajusta a la distribución normal explicada solamente por la media-desvío es un supuesto simplificador y restrictivo. Por lo general la distribución de probabilidad de los posibles valores de activos presenta sesgos y asimetrías. Adicionalmente las expectativas de los agentes juegan un rol fundamental en la composición del precio, por lo tanto estas no pueden sustraerse del proceso de estimación de valor.

El modelo binomial (CRR) supone normalidad en el comportamiento del subyacente y las probabilidades correspondientes a los arcos de la rejilla binomial. Incorporar al modelo binomial los momentos estocásticos de orden superior implica inferir la distribución de probabilidad a partir de los precios y expectativas de los agentes. Esto es posible trabajando con volatilidad y probabilidades implícitas. Las primeras son estimadas suponiendo que el precio de mercado de la prima se ajusta el modelo BMS. Las segundas son estimadas partiendo de la volatilidad implícita y ajustando el arco de probabilidades al valor observado de la prima. En el trabajo se demostró las diferencias en los valores obtenidos, en particular para los contratos con precio de ejercicio más alto (cerca de estar fuera del dinero).

La eficacia del método analizado dependerá del grado de precisión con que se determina: la volatilidad implícita, el valor del subyacente en el horizonte temporal planteado y la disponibilidad de información (precios) para inferir las probabilidades implícitas.

REFERENCIAS

- Arnold, T- Crack, T- Schwartz, A. (2004). *Implied Binomial Trees in Excel whitout VBA*. SSRN: Social Science Research NetWork .
- Black, F- Scholes, M. (Mayo de 1972). The Valuation of Options Contracts and a Test of Market Efficiency. *Journal of Finance*, 399-418.
- Black, F- Scholes, M. (Mayo-Junio de 1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, 637-659.
- Breeden, D-Litzenberger, R. (1978). Prices State-Contingent Claims Implict in Options Price. *Journal of Business*(51), 621-651.
- Collan, M- Fullér, R-Mezei, J. (2009). Fuzzy Pay-Off Method for Real Option Valuation. *Journal of Applied Mathematics and Decision Systems*, ID 238196, 1-14.
- Cox, J- Ross, S-Rubinstein, M. (Septiembre de 1979). Option Pricing: A Simplified Approach. *Journal of Financial Economics*, 229-263.
- Cox, J- Ross, S. (1976). The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes. *Journal of Financial Economics*(3), 145-166.
- Datar, V- Matews, S-Johnson, B. (2007). A Practical Method for Valuing Real Options: The Boeing Approach. *Journal of Applied Corporate Finance*, 19, 95-104.
- Datar, V- Mathews, S. (2004). European Real Options: An intuitive Algorithm for the Black-Scholes Formula. *Journal of Applied Finance*, 14, 7-13.
- Merton, R. (Primavera de 1973). The Theory of Rational Options Princing. *Bell Journal of Economics and Management Science*, 141-183.
- Milanesi, G. (2013). *Teoría de Opciones: Modelos específicos y aplicaciones para valorar estrategias, activos reales e instrumentos financieros* (Primera ed.). Bahía Blanca: Editorial de la Universidad Nacional del Sur. REUN.
- Milanesi, G-Tohmé F. (2014). Árboles Binomiales Implícitos, Momentos Estocásticos de Orden Superior y Valuación de Opciones. *Revista de Economía Política (REPBA)*, 12(7), 45-72.
- Ross, S. (1976). Options and Efficiency. *Quaterly Journal of Economics*(90), 75-89.
- Rubinstein, M. (3 de 1994). Implied Binomial Trees. *Journal of Finance*, 49, 771-818.

- Rubinstein, M. (1998). Edgeworth Binomial Trees. *Journal of Derivatives*(5), 20-27.
- Shimko, D. (1993). Bounds on Probability. *RISK*(6), 33-37.
- Taleb, N. (2007). *The Black Swam*. New York: Random House.
- Wilmott, P. (2009). *Frequently Asked Questions in Quantitative Finance* (Segunda ed.). United Kingdom: John Wiley & Sons.
- Zdnek, Z. (2010). Generalised Soft Binomial American Real Option Pricing Model. *European Journal of Operational Research*(207), 1096-1103.