OPCIONES REALES.
ALGUNAS INQUIETUDES RELEVANTES

Juan Esandi
Fabio Rotstein
René D. Perotti
Gastón Milanesi

Universidad Nacional del Sur

SUMARIO: 1.Introducción; 2. Planteo del problema básico; 3. Relación entre la regla óptima y otros criterios de evaluación financiera; 4. Comentarios finales.

Para comentarios: jesandi@uns.edu.ar
frotstein@uns.edu.ar
rperotti@uns.edu.ar
milanesi@uns.edu.ar

1. Introducción

Las reglas de decisión en torno a proyectos de inversión son tema de constante debate en el campo de las finanzas de la empresa. Desde los pioneros trabajos de Durand escritos en los primeros años de la década del ´70 hasta la fecha, mucho se ha avanzado en el intento de diseñar una regla de decisión confiable y segura para decidir en torno a proyectos de inversión en activos reales. En está búsqueda, la prima de riesgo de la tasa de descuento para distintos tipos de proyectos ha concentrado buena parte de los esfuerzos de investigación. Pese a los significativos avances logrados a través del desarrollo de modelos conocidos como CAPM y APT [1] su aplicación práctica sigue encontrando posturas escépticas en ámbitos empresariales e inclusive en ámbitos académicos. Estas dudas se acentúan en contextos con mercados de escaso desarrollo y para empresas de capital cerrado.

La validez de los enfoques convencionales para juzgar la deseabilidad y conveniencia de inversiones se ve sometida a examen a partir de dos frentes. El primero, es la vigencia de enfoques aparentemente más pragmáticos sin mayor fundamento académico, pero fácilmente comprensibles para los tomadores de decisiones. Se podrían caracterizar como reglas empíricas “ad hoc”[2] entre las que se destacan la “tasa de corte” y el criterio de “período de recupero”. El segundo frente, se desarrolla en el mismo ámbito académico a partir de la consolidación de un nuevo enfoque bajo condiciones de incertidumbre basado en la teoría de opciones, y conocido como

[1] CAPM (Capital Assets Pricing Model) y APT (Arbitrage Price Theory)
[2] “ para esto”, es decir, dispuestas para un fin particular o definido

Teoría de las Opciones Reales. Esta teoría parece haber tomado fuerza desde mediados de la década del ´80 y de acuerdo a reconocidos autores se proyecta como parte del instrumental básico de las finanzas de los próximos años. Por caso, Copeland, Weston y Shastri han señalado en la introducción de su último libro, textualmente lo siguiente: "…*Las seis teorías seminales e internamente consistentes que conforman los cimientos de las finanzas modernas son: (1) teoría de la utilidad, (2) teoría de las preferencias contingentes*[3]*, (3) teoría de la cartera, (4) el modelo de valoración de activos de capital (CAPM) y la teoría de fijación de precios por arbitraje (APT), (5) los teoremas de Modigliani y Miller y (6) la teoría de las opciones reales….*", caracterizando luego esta última teoría como "*…. una herramienta de decisión en camino de reemplazar el valor presente neto…*" [4].

El enfoque de opciones reales propone el diseño de una regla de decisión para el inversor "a lo largo del tiempo". Al ser un conjunto de elecciones a lo largo del tiempo, su propósito es encontrar la mejor estrategia de inversión, entendiendo a está última como una secuencia de decisiones en torno a un proyecto. El planteo es dinámico, a diferencia del enfoque convencional basado en la regla del VAN[5] donde se analiza una decisión en torno al proyecto del tipo "ahora o nunca". La mayor perspectiva del enfoque de opciones intenta internalizar el valor de derechos a optar por parte de los inversores, que conllevan ciertos proyectos de inversión. Por esta razón, habitualmente se dice que las opciones reales captan el valor de la flexibilidad de distintos proyectos que puede presentarse tanto en aspectos relaciones con la faz operativa como en lo concerniente a la decisiones de financiamiento.

Los dos frentes señalados para el enfoque ortodoxo, en el ámbito empresarial la prevalencia en el uso de viejas reglas empíricas, y en ámbito académico, la creciente aceptabilidad del enfoque de opciones reales, parecen guardar una estrecha relación. En ambos casos se derivan reglas de decisión en torno a proyectos, y como se podrá comprobar más adelante, las prácticas basadas en reglas empíricas como la tasa de corte o período de recupero pueden conducir a decisiones similares a las que se tomarían mediante procedimientos más sofisticados basados en la aplicación de la teoría de opciones reales. Esta relación se base en resultados de estudios realizados en los últimos años,

El siguiente trabajo presenta una exposición de la relación entre la estrategia óptima de inversión y distintas reglas de decisión. El objetivo del análisis consiste en exponer, relacionar y sintetizar, en el marco de un modelo sencillo basado en trabajos previos de importantes autores, las relaciones entre los criterios convencionales de aceptación de proyectos y las reglas de óptimo propias del enfoque de opciones reales.

Esta meta requiere comprender como se deriva una regla de decisión óptima a través de la aplicación de este último enfoque. Debido a que las técnicas matemáticas empleadas pueden resultar sumamente complejas para el lector no familiarizado con las mismas, el trabajo persigue el objetivo de presentar y explicar el instrumental matemático. La expectativa es facilitar la accesibilidad y comprensión de trabajos que normalmente asumen un conocimiento previo de estos conceptos por parte de sus lectores.

El trabajo presenta dos secciones principales, La primera desarrolla en forma detallada, un modelo simple de inversión irreversible. La exposición intentará seguir fielmente el tratamiento del tema desarrollado por Dixit y Pindyck (1994). La segunda parte, analiza la relación entre reglas óptimas y reglas subóptimas basadas en criterios empíricos. Esta segunda parte, se basa en el estudio de Mc Donald publicado en Brennan y Trigeorgis (2000).

---

[3] "state-preference aproach"

[4] Copeland T, Weston J.F. y Shastri K. (2003)

[5] Valor Actual Neto

2. Planteo del problema básico

Esta sección presenta el planteo básico del problema de la inversión de la empresa a través de la formalización propia del enfoque de opciones reales. Siguiendo a McDonald (2000) se plantea un modelo básico en torno al problema de decidir una inversión "irreversible". El problema central para quien analiza el problema se resume en los siguientes interrogantes. Dada la irreversibilidad del proceso, ¿en que momento resulta óptimo invertir?, y una vez identificada esta regla, ¿Cuál es el valor resultante de la inversión en caso de aplicarla?

Es importante destacar la importancia del concepto de irreversibilidad o para no adoptar posturas tan extremas, del "grado de reversibilidad" [6] de las decisiones de inversión en activos reales. Considerar esta aspecto, confiere importancia central al problema de decidir el momento de la inversión, y por lo tanto, representa un planteo más amplio con respecto al enfoque convencional de analizar este tipo de cuestiones en términos de la opción "ahora o nunca" característico del enfoque del Valor Actual Neto[7].

La búsqueda de un valor "optimo" impone la necesidad de identificar un objetivo. La resolución del problema se guiará por el objetivo de maximizar el valor de la oportunidad de inversión. Por tratarse de un objetivo con comportamiento aleatorio en el tiempo el problema debe formularse en términos de maximizar un valor esperado; concretamente la diferencia en el valor actual de dos variables aleatorias en el tiempo: el costo de inversión y sus flujos de fondos asociados[8]. Es oportuno destacar dos aspectos adicionales del planteo; el primero es su carácter dinámico por cuanto lo que se intenta maximizar es una función que representa el comportamiento aleatorio del valor de una inversión. El segundo guarda una relación íntima con el primero y se refiere a los instrumentos del análisis. La herramienta matemática apropiada para su resolución es la programación dinámica. El planteo en términos de funciones continuas en el tiempo facilita un análisis de por si complejo para aquellos que no están familiarizados con este tipo de técnicas [9].

Quizás valga la pena destacar que lo importante para la visión de la teoría de las finanzas de la empresa es la precisión y rigor del instrumento matemático como medio para la búsqueda de soluciones a problemas de naturaleza compleja pero donde el verdadero fin es intentar intuir, comprender e interpretar razones económicas en torno a la decisión sobre inversiones en activos reales.

Como se señaló antes, el planteo del problema en torno a la elección del momento de cuando invertir lleva a poder encuadrar el mismo como un problema de programación dinámica. Una visión alternativa sería trazando una analogía con las opciones de inversión de compra sobre activos financieros o call options; por cuanto quien evalúa el proyecto, sino esta obligado a hacerlo en forma inmediata, tiene la opción de elegir el momento de ejecución del mismo. Este primer enfoque permite comprender mejor el problema desde la perspectiva matemática en tanto que el segundo, facilita una interpretación de su relevancia desde la perspectiva del enfoque financiero[10].

El punto de partida para la construcción del modelo consiste en asumir el supuesto que la aleatoriedad en la evolución temporal de los flujos de fondos (F_t) es adecuadamente descrito por algún "proceso estocástico" de forma conocida.

---

[6] También se utiliza la expresión en ingles "scrap value"

[7] Este aspecto se puede profundizar en el primer capítulo de Pindyck y Dixit (1994)

[8] A los efectos de simplificar la exposición, se asumirá que la inversión asume un valor constante y conocido en el tiempo.

[9] Para una introducción accesible a las técnicas de programación matemática se puede ver Alpha Chiang (1983).

[10] Dixit y Pindyck (op. cit.) hacen muy interesantes consideraciones sobre la relación entre los dos enfoques.

2.1 Procesos estocásticos

Un proceso estocástico describe el **comportamiento probable de una variable que evoluciona en el tiempo**, y al menos parte de su evolución se explica por un **componente aleatorio**.

Se describe a través de una **función de probabilidad** de la variable definida con una dimensión temporal. A medida que transcurre el tiempo, los valores observados de la variable "condicionan" su probable comportamiento futuro.

Se dice que el proceso estocástico es **estacionario** cuando el mismo mantiene las propiedades estadísticas que lo caracterizan a lo largo del tiempo como por ejemplo valor esperado y variancia de la variable descripta a través del proceso estocástico. Caso contrario, se dice que el mismo resulta **no estacionario**.

Se denominan **Procesos Estocásticos Continuos en el Tiempo**, si el índice de tiempo para la variable aleatoria es continuo (por ejemplo, la temperatura). Si este no fuera el caso, y la referencia temporal corresponde a períodos discretos o intervalos, entonces se denomina **Procesos Estocásticos de Tiempo Discreto**.

Una característica interesante y conveniente de los procesos estocásticos es cuando satisfacen la **Propiedad de Markov**. En este caso, se los denomina **Procesos de Markov.** Su descripción se ve notablemente simplificada por cuanto el valor esperado de la variable estocástica en un momento determinado solo depende del valor en el momento inmediato anterior.

Entre los más conocidos y de mayor aplicación se destacan los Procesos de Wiener. También se los denomina "Brownian motion", representa un **proceso estocástico de tiempo continuo.** Se caracteriza por tres propiedades: (1) es un proceso de Markov, es decir que la distribución de probabilidad de eventos futuros se explica solo por la situación actual, (2) los cambios aleatorios de la variable, dependen de una función de probabilidad pero resultan independientes en cada intervalo de tiempo de los otros intervalos, (3) los cambios en el proceso durante un cierto intervalo de tiempo siguen una distribución normal, con una variancia que aumenta con el tiempo en forma lineal. Estas propiedades determinan unas características interesantes en la evolución de variables descritas por procesos de Wiener; por cuanto para un intervalo finito, la variación de la variable seguirá una distribución normal con media y variancia igual a la extensión del intervalo. De esto se desprende que cuanto mayor sea el intervalo mayor será la variancia del cambio en la variable. Otro aspecto a remarcar es que se trata de un proceso no estacionario, su valor esperado y variancia cambian conforme transcurre el tiempo[11].

Los procesos de Wiener son muy útiles por cuanto sirven para modelar una gran variedad de procesos estocásticos. Es posible demostrar que un proceso en tiempo discreto representado por una distribución binomial (random walk), en el límite, cuando la cantidad de períodos tiende a infinito, converge a una distribución normal; es decir a procesos Brownianos.

Una versión más refinada y general de procesos de Wiener, agregando un parámetro de desplazamiento. Se los denomina *"Brownian motion with drift"*. La ecuación fundamental que lo resume es la que figura a continuación, donde el cambio en la variable tiene un componente de tendencia asociado al transcurso del tiempo y un segundo componente de variación o desplazamiento en cada momento del tiempo y de comportamiento aleatorio

$$dx = \boldsymbol{a}\,dt + \boldsymbol{d}\,dz$$

Una versión aún más refinada del proceso que describe "movimientos brownianos" son los denominados *Procesos de Ito*[12]. La diferencia ahora es que los anteriores parámetros son variables continuas que dependen del valor de la variable y el tiempo. La ecuación es

$$dx = a(x,t)\,dt + b(x,t)\,dz$$

[11] Dixit y Pindyck, pag. 64

[12] "Ito Process"

En esta expresión general, un caso particular de suma utilidad para finanzas es el *"movimiento browniano geométrico"* o *"Geometric Brownian Motion*. En este caso, la expresión general de Ito asume la siguiente forma

$$dx = a\,xdt + d\,xdz$$

En este caso, se puede demostrar que x ahora representa log(x). Con una cierta definición de alfa, lo interesante del caso es que el valor esperado del proceso es igual al valor actual de una variable continua en el tiempo y por esta razón, representa un proceso estocástico de mucha aplicación en Finanzas.

Una variedad de procesos "Brownian Motion" interesante para aplicar en finanzas son los denominados de "reversión a la media". Los procesos estocásticos vistos hasta ahora tienden a apartarse de su valor inicial; en tanto que los de reversión a la media tienden a converger en torno a un valor medio. Son de interés en economía sobre todo cuando este valor medio representa un nivel de "equilibrio" de largo plazo. El más simple de los procesos reversión a la media es el de Ornstein–Uhlenbeck process, con valor esperado y varianza conocidos[13].

$$dx = h\left(\bar{X} - x\right)dt + s\,dz$$

Al disponer de una amplia variedad de procesos estocásticos, se plantea el dilema de cuál es el apropiado para armar modelos problemas de finanzas. En parte es un problema que se puede resolver empíricamente ensayando ajustes econométricos para diferenciar, por ejemplo, si se trata uno de tipo random walk o un proceso reversión a la media[14]. En líneas generales, para el análisis de inversiones, la mayoría de los análisis teóricos se inclinan por el uso de procesos del tipo *Geometric Brownian Motion*.

2.2 Planteo formal del problema

Al asumir un cierto régimen aleatorio en torno a la evolución esperada del Flujo de Fondos, se determina un proceso aleatorio de similares características para el valor de la inversión en cada instante del tiempo (V_t).

Siguiendo la representación del modelo básico de Dixit y Pindyck (1994, pág.136), el objetivo es identificar una regla que permita maximizar el valor de una opción a invertir en un proyecto que supone la adquisición de activos a un costo conocido y constante en el tiempo[15]. Dado que el resultado de invertir en el proyecto en un cierto momento es V_t – I, lo que se busca es maximizar el valor esperado de su valor actual; es decir:

$$F(V) = \max e\left[\left(V_T - I\right)e^{-rT}\right] \qquad \text{Ecuación 1}$$

En la ecuación (1), el símbolo e representa la esperanza matemática, T es el momento futuro en que se realizaría la inversión y r es la tasa de descuento de los flujos del proyecto. La tasa de descuento podría ser la resultante de la aplicación de algunos de los modelos conocidos para su determinación (CAPM, APT). El valor de la inversión en un instante futuro cualquiera (V_t) será el resultante de descontar los flujos de fondos aleatorios (p_t) a la tasa de descuento conocida. Un aspecto importante a tener en cuenta es que los flujos de fondos y consecuentemente el valor de la inversión siguen un proceso estocástico de régimen conocido.

---

[13] con h =0, es igual a un proceso estocástico del tipo simple Brownian motion.

[14] Dixit y Pindyck (op. cit.), pág. 77-78

[15] como se señalo antes, la inversión también podría ser una variable estocástica.

Los siguientes pasos intentarán seguir fielmente el curso del tema desarrollado por Dixit y Pindyck. El proceso estocástico asumido por estos autores para el valor del proyecto (V_t) en la representación del modelo básico, es uno del tipo "Geométrico Browniano", el cual se representa por la siguiente ecuación

$$dV = a\,Vdt + s\,Vdz \qquad \text{Ecuación 2}$$

El valor del proyecto varía de acuerdo a dos componentes. El primero refleja un efecto de crecimiento en el tiempo de magnitud a . El segundo contiene las posibles oscilaciones del valor generado por razones aleatorias y cuyo efecto dependerá de s [16].

Con el supuesto anterior, puede ahora reformularse el objetivo del problema para quien evalúa la inversión. Se plantea un problema de optimización en el tiempo bajo condiciones de incertidumbre. El problema del inversor es elegir la mejor estrategia, entendiendo esta como una secuencia de decisiones a lo largo del tiempo. La mejor estrategia será aquella que logre maximizar el valor actual de la inversión, sabiendo que enfrenta un conjunto de estrategias posibles[17]. Por tratarse de decisiones sobre eventos futuros, el resultado es un valor esperado.

La herramienta matemática apropiada para la resolución de este tipo de problemas es la programación dinámica. Tal como señalan Dixit y Pindyck[18], la esencia del método consiste en descomponer la secuencia de decisiones en dos componentes. El primero es el resultado de la decisión inmediata siguiente para el inversor y el segundo, define una función que refleja el valor del conjunto siguiente de decisiones que se pueden tomar según cual haya sido la decisión inmediata. Asumiendo que el horizonte de planeamiento de la inversión es finito y es posible conocer el valor esperado del resultado óptimo en el último periodo para cada estrategia posible, se podría identificar la decisión o acción óptima en el anteúltimo período; por cuanto debiera ser consistente con el propósito de alcanzar el periodo óptimo en el estadio final. De esta forma, se puede ir hallando la secuencia de decisiones óptimas hasta arribar al momento inicial[19].

Para ilustrar la idea anterior, se podría considerar un caso simple de un proyecto con dos períodos. Las estrategias posibles del inversor sería tres: invertir hoy, esperar e invertir en el segundo período, no invertir. El objetivo de maximizar el valor de la inversión se resume en la expresión siguiente:

$$F_0 = \max\left[V_0 - I\,, \frac{e_0\left(F_1\right)}{1+r}, 0\right] \qquad \text{Ecuación 3}$$

La misma debiera resultar familiar para quien cuente con conocimientos sobre el concepto del valor intrínseco de opciones financieras. Notar que el segundo elemento del lado derecho de (3) refleja el valor actual esperado de posponer la inversión un período y por lo tanto, resultará del promedio de los flujos de fondos ponderados por probabilidades.

Si el planteo del inversor hubiera sido del tipo "ahora o nunca", el objetivo hubiera sido maximizar el valor de (3) suprimiendo el elemento intermedio del lado derecho. Esta nueva expresión simbolizada en Ω_0, refleja el planteo o enfoque ortodoxo del Valor Actual Neto (VAN). Notar que tanto F_0 como Ω_0 son funciones de las mismas variables y parámetros, ambas dependen del valor esperado de los flujos de fondos del proyecto en cada instante del tiempo (por ejemplo los precios del producto en el momento inicial y final). Por lo tanto, para encontrar la regla óptima se debería hallar bajo que condiciones comienza a resultar óptimo esperar. Esto sucedería a partir del punto en que se torna indiferente invertir ahora o diferir un período. En

[16] Para una explicación más detallada, consultar Dixit y Pindyck (op. cit. Cap 3)

[17] En el modelo básico, la posibilidad de iniciar la inversión en cualquier momento del período de planeamiento del proyecto

[18] Dixit y Pindyck (op. cit., pág 93)

[19] Si el horizonte es infinito, la característica de recursividad del problema facilita significativamente la búsqueda de solución, aún cuando no se disponga de un valor final como punto de partida (ver Dixit y Pindyck, pág. 94)

términos matemáticos surge cuando se igualan ambas funciones. Esta relación define implícitamente bajo que condiciones (i.e. relación entre parámetros y variables independientes) comienza a ser óptima esperar o no. Bajo las condiciones específicas del problema resumidos en un cierto nivel de variables y parámetros, la diferencia entre F_0 y Ω_0 reflejaría el valor incremental propio de la mayor flexibilidad del proyecto si es posible diferir su iniciación.

Si se analiza el conjunto de parámetros y variables independientes del problema es importante, diferenciar las variables de estado (*x*) de las variables de control (*u).* Ambas pueden ser escalares o en términos más generales, vectores, de modo que contemple múltiples dimensiones tanto del escenario como de las opciones estratégicas de la firma en cada momento del tiempo. La variable de estado tiene un valor conocido en el momento actual (i.e. en el momento *t*, se conoce *x(t))* pero se desconoce sus valores futuros (representado en forma genérica por *x´).* La única información disponible con respecto a estas últimas es su distribución de probabilidad (Φ'), la cual se puede definir a partir del conocimiento de las condiciones actuales reflejadas en *u(t)* y *x(t)* [20]. El problema del inversor, desde el punto de vista matemático, consiste en buscar valores óptimos para las variables de decisión a lo largo del tiempo (*u)* dado un conjunto conocido de condiciones actuales (resumidas en *x(t)*) y otro de condiciones esperadas (resumidas a partir de *x´).*

Con las aclaraciones anteriores, se retoma el planteo matemático del problema de decidir la estrategia óptima de inversión reflejada en (1). El siguiente paso consiste en rescribir esta ecuación pero descomponiendo los datos ciertos del momento actual del conjunto de información incierta que corresponde al momento inmediato posterior al actual. Esta diferenciación, como se señalo antes, refleja la esencia del método de programación dinámica, conocido como “Principio de Optimalidad de Bellman” y se instrumenta formalmente a través de la siguiente ecuación conocida como “Ecuación de Bellman” o “ecuación fundamental del óptimo”. A efectos de facilitar la comprensión del paso a dar, se rescribe la ecuación (1) y a continuación la ecuación fundamental para el problema de inversión irreversible:

$$F(V) = \max e\left[(V_T - I)e^{-rT}\right]$$

$$F(V(x,t)) = \max_u \left\{p\,(x,u,t)\Delta t + (1+r\Delta t)^{-1} e\left[F(x',t+\Delta t)\setminus x,u\right]\right\} \qquad \text{Ecuación 4}$$

El lado derecho de la ecuación (4) presenta los dos componentes. Para la representación formal en tiempo continuo, por razones de conveniencia se expresa en términos de intervalos de tiempo de extensión Δt y se supone que estos tienden a cero. El segundo componente refleja el valor esperado óptimo del proyecto en el intervalo Δt dadas las condiciones y decisiones actuales resumidas en x y u. Este valor se expresa en términos actuales, aplicando la tasa de descuento ajustada para el intervalo Δt. Cabe aclarar que esta tasa de descuento correspondería a cada unidad de tiempo, y la tasa de descuento del período a descontar surgiría del producto entre r y Δt.

Por razones que de conveniencia que se aclararán seguidamente, conviene expresar la ecuación (4) en los siguientes términos resultantes de multiplicar ambos lados de la igualdad por $(1+r\Delta t)$

$$F(V(x,t))(1+r\Delta t) = \max_u \left\{p\,(x,u,t)\,\Delta t(1+r\Delta t) + e\left[F(x',t+\Delta t)\setminus x,u\right]\right\}$$

$$r\Delta t F(V(x,t)) = \max_u \left\{p\,(x,u,t)\Delta t(1+r\Delta t) + e\left[F(x',t+\Delta t)\setminus x,u - F(x,t)\right]\right\}$$

[20] Esta propiedad refleja el supuesto de suponer que el problema se puede encuadrar como un proceso de Markov, en los cuales, toda la información relevante para determinar las distribuciones de probabilidad de las variables en el futuro esta sintetizada o contenida en el valor de la variable actual

$$\boxed{r\Delta t F(x,t)) = \max_u \{p(x,u,t)\Delta t(1+r\Delta t) + e[\Delta F]\}} \qquad \text{Ecuación 5}$$

Dividiendo por Δt y asumiendo que tiende a cero (i.e. en un enfoque de tiempo continúo), el último término de la ecuación anterior se expresa en término de diferenciales. La expresión resultante (6) refleja el valor esperado de las ganancias de capital si se aplica el conjunto de decisiones u que maximizan el valor esperado del proyecto. Puesto de este modo, la ecuación expresa la conocida condición de equilibrio del inversor que iguala la tasa de rendimiento mínimo requerido con el rendimiento esperado de la inversión. Cabe tener presente que esta condición de equilibrio se deriva a partir de la ecuación fundamental de la programación dinámica (ecuación (4)).

$$\boxed{rF(V(x,t)) = \max_u \left\{p(x,u,t) + \frac{1}{dt}e[dF]\right\}} \qquad \text{Ecuación 6}$$

Recordando que el problema bajo análisis consiste en la elección del momento óptimo de realización de una inversión irreversible, si el momento de realización de la misma se define como *T*, en el tiempo previo el componente de utilidad inmediata será nulo y el único retorno será la ganancia esperada de capital (la apreciación del proyecto) si se mantiene latente la opción a invertir. Para el caso bajo análisis, en la zona donde conviene diferir la iniciación del proyecto[21], la expresión general (6) se resume a:

$$\boxed{rF(V(x,t))dt = \max_u \{e[dF]\}} \qquad \text{Ecuación 7}$$

La ecuación (6) resume la condición o restricción para que resulte óptimo postergar la iniciación del proyecto. Esta forma funcional general se puede desarrollar a partir de la aplicación del Lema de Ito[22]. Dado que *dF(V(x,t))* refleja el diferencial de una variable que sigue un proceso estocástico, si se aplica el citado Lema, surge la siguiente relación general

$$dF = \left(\frac{dF}{dV}\right)dV + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2F}{dVdV}\right)dV^2$$

Para el caso específico bajo análisis, se había supuesto un proceso Geométrico Browniano. Aplicando la identidad anterior a la ecuación (2), y recordando que $e(dz)$ es nulo, se obtiene

$$e[dF] = aV \cdot F'(V)dt + \frac{1}{2} \cdot F''(V)dV^2$$

Los pasos anteriores permiten rescribir la ecuación general de Bellman (ecuación 6) en términos de una ecuación diferencial de segundo grado, con una forma funcional específica que resulta del proceso estocástico supuesto para reflejar el comportamiento aleatorio de los flujos del Proyecto en el tiempo.

$$\boxed{\frac{1}{2}s^2V^2F''(V) + aV \cdot F'(V) - rF = 0} \qquad \text{Ecuación 8}$$

[21] Conocida como región de continuidad (continuation region) (Dixit y Pindyck, op. cit. pág 140)

[22] El Lema de Ito representa una herramienta fundamental para la resolución de problemas cuando alguna(s) de la(s) variable(s) siguen procesos estocásticos. El lema de Ito presenta la diferencial total de una función en cuyo argumento se encuentran variables que siguen procesos estocásticos. Por ejemplo, si el precio del oro sigue un proceso estocástico, el Lema de Ito resulta decisivo para determinar el proceso estocástico del valor de la opción a invertir en la mina que lo produce. Para ver aplicaciones del lema de Ito ver Dixit y Pindyck, pág 81 -82.

En términos matemáticos, el problema consiste en hallar una forma funcional para los flujos esperados del proyecto que satisfaga la ecuación anterior. Para arribar a la solución, deben definirse condiciones de borde que la misma debe contemplar. Desde una perspectiva económica, son restricciones que debe contemplar el problema de la inversión irreversible óptima. Por lo tanto, una vez definida la condición de equilibrio en términos de una ecuación diferencial, el siguiente paso consiste en especificar las restricciones o condiciones para arribar a la solución.

2.3 Restricciones para la solución particular

Es interesante notar que dado que el análisis apunta a establecer las características de la regla óptima en función de las relación entre variables de estado y parámetros, la solución delimitará un conjunto de valores del proyecto (V*) que tornarán indiferente la opción de invertir ahora o esperar. Idealmente, esta función debiera ser la frontera entre dos regiones en las que domina una y otra opción. No obstante, esto no siempre es así y para que ello suceda deben darse ciertas condiciones. De allí se derivan restricciones que debe observar el planteo para que su solución presente esta conveniente propiedad. Estas restricciones son dos: (1) condiciones de monotonicidad creciente de la variable de estado de manera que la ventaja de la opción dominante se vea reforzada a medida que crece la variable de estado, y (2) a medida que se "interna" en la región donde domina una opción, que la probabilidad de que esta ventaja se vea revertida en el futuro sea decreciente. Esta segunda propiedad se denomina "dominancia estocástica de primer orden". Afortunadamente, un conjunto amplio de procesos estocásticos – incluyendo el Geométrico Browniano – y la mayoría de las aplicaciones en opciones reales, cumple con estas condiciones. Vale la pena aclarar que esta son condiciones para delimitar un "único borde". A continuación, se resumen las condiciones para que exista un borde, sabiendo por lo anterior, que este reúne las características "deseables".

Las restricciones son tres. La primera señala que la opción de invertir tiene un valor nulo cuando el proyecto no tiene valor, es decir:

$$F(0) = 0 \qquad \text{Ecuación 9}$$

La segunda condición se relación con propiedades que debe cumplir el valor de la estrategia óptima de inversión ($F(V^*)$). En términos matemáticos, representa la condición de borde o frontera libre en la región de continuidad. Su significado es que una vez que la firma decide invertir, el valor de la oportunidad de diferir el proyecto ($F(V^*)$) debe ser igual al Valor del Proyecto (V^*) neto de los costos de inversión (I). Trazando paralelismos con la teoría de valuación de opciones financieras, equivale a la condición de igualdad del valor de la opción con su valor intrínseco al momento de su vencimiento. De este modo, la segunda condición[23] impuesta a la solución (V^*) se expresa en los siguientes términos:

$$F\left(V^*\right) = V^* - I \qquad \text{Ecuación 10}$$

La tercera restricción impuesta a la solución refuerza la anterior. La idea es que para asegura que la solución delimite la frontera o borde de la región de continuidad, además de la igualación del valor óptimo de manera que se torne indiferente invertir o esperar, se agregar una segunda condición de manera que el valor incremental de ambas opciones en ese punto se igualen. En consecuencia, este tercera condición se refiere a propiedades que debe observar la "derivada de las funciones con respecto a la solución" en la zona de borde[24] y concretamente señala que ambas derivadas evaluadas deben ser iguales si se evalúan en V^*. Formalmente se plantea del siguiente modo:

---

[23] En los textos especializados, se la denomina "value matching condition"
[24] Se denomina "smooth pasting condition".

$$F'\left(V^*\right) = \frac{d}{dV^*}\left(V^* - I\right) = 1 \qquad \text{Ecuación 11}$$

2.4 Solución: determinación de la regla óptima

La siguiente etapa en el análisis del problema de la estrategia óptima de inversión consiste en determinar la solución a la ecuación (8), contemplando las tres restricciones reflejadas en las ecuaciones (9) y (10). La expresión (8) es una ecuación diferencial de segundo grado[25]. Su solución no es valor numérico, sino una función que en el caso bajo análisis es *F(V).*

A los efectos de avanzar con el problema, se puede asumir una forma funcional para F(V) y determinar las condiciones bajos, las cuales la misma satisface a (8) contemplando las restricciones. Para el caso bajo análisis, se ensaya la siguiente solución general[26] AV^b . Sustituyendo en la ecuación (8) se obtiene, la ecuación cuadrática siguiente,

$$\boxed{j\left(b\right) = \frac{1}{2}s^2 b\left(b-1\right) + \left(r-d\right)b - r = 0} \qquad \text{Ecuación 12}$$

con

$$a = r - d$$

La expresión anterior se repite en los planteos formales de problemas con opciones reales. Su solución se define por las raíces b con subíndice 1 y 2 [27]. La raíz negativa no cumple con la condición impuesta por (1.9) de modo que la solución incluye solamente la raíz positiva. En consecuencia, la solución general será

$$F\left(V\right) = A_1 V^{b_1} \qquad \text{Ecuación 13}$$

con

$$b_1 = \frac{1}{2} - \left(r-d\right)/s^2 + \sqrt{\left[\left(r-d\right)/s^2 - \frac{1}{2}\right]^2 + 2r/s^2} > 1 \qquad \text{Ecuación 14}$$

y

$$a = r - d$$

Para arribar a la solución particular, es decir con valores definidos de A_1 y V^*, deben aplicarse las condiciones del problema resumidas en las ecuaciones (9) y 911). En relación a (9), se observa que la solución ensayada cumple con la restricción de valor nulo. Sustituyendo la solución general en (10) y (11), se arriba al siguiente resultado

$$V^* = \frac{b_1}{b_1 - 1} I \qquad \text{Ecuación 15}$$

con

$$A = \frac{\left(V^* - I\right)}{\left(V^*\right)^{b_1}} = \frac{\left(b_1 - 1\right)^{b_1 - 1}}{\left[\left(b_1\right)^{b_1} I^{b_1 - 1}\right]} \qquad \text{Ecuación 16}$$

---

[25] El grado hace referencia al orden más alto de las derivadas que aparecen en la ecuación diferencial.

[26] Para una explicación clara del concepto de ecuaciones diferenciales y determinación de la solución, ver Alpha Chiang (1987)

[27] La solución se halla por procedimientos conocidos, particularmente el conocido como "completar el cuadrados". Ver Chiang Alpha (1987, págs. 44 – 45)

2.5 Características de la solución

A continuación se analizarán algunas características de la solución al problema de decidir la estrategia óptima en torno a inversiones irreversible, tratando de enfatizar la intuición o mensaje de la misma, desde la perspectiva del análisis financiero.

Al observar la solución en (15), se advierte que en equilibrio existe una brecha entre los valores el Valor del negocio y el costo de inversión. Cabe notar que como b_1 es mayor que uno (por 14), el primero excederá al segundo. En otros términos, cuando existe la opción de diferir la iniciación del proyecto, a diferencia del planteo convencional del Valor Actual Neto, para iniciar el proyecto, el inversor requerirá un plus de valor por encima del costo de la inversión.

Los factores que determinarán el costo de oportunidad por matar la opción de diferir la iniciación del proyecto están representados por el conjunto de variables que determinan b_1. Entre ellos, cabe destacar el crecimiento esperado del valor del negocio (reflejado en a), la tasa de descuento del inversor (r) y la volatilidad del valor del negocio (reflejada en el modelo a través del coeficiente s característico del proceso estocástico).

La solución también tiene implicancias en términos de la teoría del coeficiente "*q*" de James Tobin, el cual expresa la relación entre el valor de mercado de los activos (*V*) y su costo de reposición (*I*). El criterio de inversión en base a este coeficiente consiste en invertir toda vez que este es mayor que la unidad. En el planteo con opciones reales, se observa que el criterio de inversión óptimo (ecuación 15) impone que la relación entre *V* e *I*, debe ser superior a un coeficiente que supera a uno. Si el negocio es volátil, puede que no se observen nuevas inversiones aún en el caso en que el valor de mercado de los activos exceda su costo de reposición ($q > 1$).

Para ver los efectos de cambios en los parámetros y variables exógenos, sobre el punto de equilibrio (V^*), se deben realizar los ejercicios convencionales de estática comparativa. En términos matemáticos, consisten en examinar el signo de la derivada de la solución de equilibrio con respecto a cambios en un determinado parámetro o variable. De (14), se puede demostrar que $\partial b_1 / \partial s < 0$, y como de (15) se puede verificar que a medida que disminuye b_1, aumenta la brecha entre el valor del negocio y el costo de inversión. Es decir, a medida que aumenta la incertidumbre, aumenta el valor de la opción de esperar y por lo tanto más se la exige al valor mínimo del negocio para que el mismo sea iniciado. De modo similar, se puede examinar el efecto sobre la "brecha" generado por cambios en la tasa de crecimiento esperada del negocio (a) y la tasa de descuento (r) a través del análisis de las derivadas respectivas en la condición de equilibrio (ecuación 15). Procediendo de esto modo, se obtiene $\partial b_1 / \partial a < 0$, y $\partial b_1 / \partial r < 0$ y por lo tanto, al aumentar tanto el potencial de crecimiento del negocio como la tasa de descuento, disminuye b_1, y por lo tanto la brecha entre el valor del negocio y el costo de la inversión aumenta. En otros términos, aumentaría el costo de oportunidad generado por la decisión de iniciar el proyecto, es decir el valor de la opción de diferirlo.

3. Relación entre la regla óptima y otros criterios de evaluación financiera

Una vez expuestos los principales aspectos y el procedimiento de formalización de las opciones reales a través de un modelo básico, la siguiente sección se basa en los resultados del trabajo de McDonald (2000). La conclusión central del mismo destaca que los criterios heurísticos[28] tan comunes en la práctica pero muy criticados en ambientes académicos por su falta de rigor analítico, suelen conducir a decisiones no muy diferentes de las que surgirían de aplicar una regla óptima derivada a partir de la aplicación del enfoque de opciones reales.

---

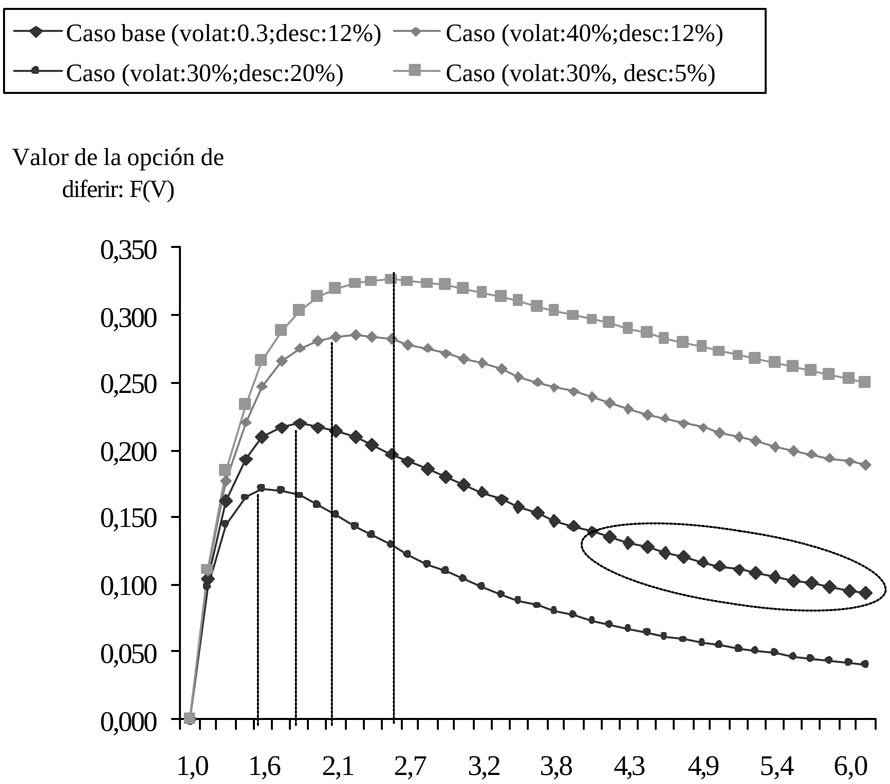
[28] Según la Real Academia, es un manera de buscar la solución de un problema mediante métodos no rigurosos, como por tanteo, reglas empíricas

Entre los criterios heurísticos en materia de finanzas de la empresa, se destacan el empleo de una tasa de descuento arbitrariamente elevada habitualmente llamada “tasa de corte”[29], y que tiende a ser mayor a medida que se percibe un mayor riesgo total del proyecto, incluido el componente no diversificable. También en esta categoría de indicadores se incluye el criterio de período de repago[30].

El uso arbitrario de cualquiera de estos criterios empíricos supone implícitamente haber definido una cierta regla de decisión para el problema anterior de opciones reales en el que se determinó una regla óptima. La pregunta que se plantea: ¿cuan diferentes son los resultados de las decisiones tomadas en base a estas reglas arbitrarias con respecto a un esquema de decisiones óptimo? Determinada la magnitud de la diferencia, también resulta interesante saber de que factores depende.

Siguiendo el trabajo de McDonald, se analiza el problema con un enfoque experimental. Se asume un conjunto de valores razonables para un proyecto de inversión irreversible y en el cual, la evolución y aleatoriedad de sus flujos de fondos se supone que esta bien representado por un proceso estocástico Geométrico Browniano. La tabla en el anexo presenta los valores supuestos para variables exógenas y parámetros del problema, acompañadas de los valores resultantes para el valor de la opción de diferir el proyecto, que surge de aplicar los resultados del modelo antes expuesto. El siguiente gráfico relaciona el valor de la opción estimada según el modelo con distintas reglas de decisión definidas en torno al valor del negocio, también denominado “valor disparador”[31]

Valor de la opción de diferir proyecto según regla de decisión empleada



[29] Hurdle rate
[30] Payback rule
[31] Trigger value

Cabe recordar que el propósito del análisis es determinar el costo en término del valor de la opción resultante de aplicar reglas subóptimas, a partir del conocimiento de la regla óptima[32]. La inspección gráfica del ejercicio planteado por McDonald permite extraer las siguientes conclusiones: (1) El "peor" de la criterios corresponde al caso en la regla de decisión coincide con el VAN nulo por cuanto ignora el costo de oportunidad de ejercer la opción de diferir el proyecto. (2) Las reglas óptimas de decisión en base al valor de negocio mínimo, para una amplia variedad de escenarios, parecen concentrarse en un rango estrecho de valores disparadores. (3) El costo de decidir en base a valores disparadores inferiores al óptimo es mayor que para valores superiores al óptimo. En otros términos, se presenta una asimetría en los resultados de estrategias subóptimas. (4) Para reglas de decisión heurísticas sobre la base de valores arbitrariamente elevados, es decir, con "posturas excesivamente conservadoras", el costo en términos de pérdida de valor de la opción de esperar no es significativo y tiende a mantenerse aún cuando se acreciente la brecha entre la regla empleada y la regla óptima. (5) El costo de aplicar estrategias subóptimas en base a reglas excesivamente conservadoras es cada vez menos significativo a medida que aumenta el valor de la opción de diferir el proyecto. Esto se ve reflejado en la forma cada vez más aplanada a medida que aumenta el valor de la opción para una cierta regla de decisión. Cabe recordar que a través del análisis de estática comparativa se verifico que el valor de la opción para una cierta regla de decisión aumenta a medida que aumenta la volatilidad y/o a medida que disminuye la tasa de descuento.

Las características anteriores se obtuvieron a partir de la simulación de resultados en un modelo que asume un tipo particular de proceso estocástico. Para otros supuestos sobre el proceso estocástico, las formas pueden ser diferentes pero se mantienen las conclusiones anteriores.

El paso siguiente consiste en examinar reglas subóptimas sobre la base de otros criterios como la "tasa de corte" y el "período de recupero". Es conveniente no perder de vista que el problema podría resolverse en la medida que se pueda establecer una relación unívoca[33] entre los dos conjuntos de variables.

Tasas de corte. En función de lo señalado, el siguiente análisis apunta a establecer la correspondencia entre la tasa de corte y el valor del negocio. Siguiendo el desarrollo de McDonald, por razones de conveniencia en el tratamiento formal, se considera el caso de un proyecto de inversión irreversible con flujos de fondos a perpetuidad. Sabido es que en este caso, la tasa interno de retorno (tir) esta representada por la siguiente ecuación

$$tir = \frac{FF}{I} + a \qquad \text{Ecuación 17}$$

Dado que el valor del negocio con flujos crecientes a perpetuidad es igual a $V = FF/(r-a)$, la regla de decisión con *tir*, consiste en que la inversión se iguale con el valor del negocio; es decir $I = FF_{tir}/(tir-a)$. En el caso particular de una cierta tasa de corte "g", la regla heurística de decisión sería cuando sea al menos igualada por la *tir*. En consecuencia, la regla sería $I = FF_g/(g-a)$. Esta función expresa la regla de decisión con la tasa de corte "g" en base a una expresión equivalente en términos de flujos de fondos. El flujo de fondos "de corte" correspondiente a "g"será FF_g. En consecuencia, para expresar la regla heurística de decisión sobre la base de la tasa de corte en términos del valor del negocio, deberá observase la siguiente relación:

$$V_g = \left[I(g-a)\right]/(r-a) \qquad \text{Ecuación 18}$$

[32] Al asumir el caso particular de proyectos con VAN nulo, el costo de regla subóptimas se refleja exclusivamente en el menor valor de la opción de diferir el proyecto.

[33] Aquella en que a cada elemento del primer conjunto corresponde inequívocamente un elemento del segundo.

Luego, si se adopta como regla de decisión un valor disparador arbitrario V_A , por (18) sabemos que le corresponderá una cierta g_A. Reemplazando en (18) y despejando esta última variable se obtiene

$$g_A = a + (r - a)\frac{V_A}{I} \qquad \text{Ecuación 19}$$

En particular, el caso fortuito en que el criterio heurístico coincide con la regla óptima conformada de acuerdo al modelo con opciones reales, se dará cuando V_A coincide con el valor en (15). Formalmente, y recordando que se deriva bajo el supuesto de flujos crecientes a perpetuidad, la coincidencia de criterios de decisión entre la tasa de corte y la tasa de descuento óptima se dará si

$$g^* = g_A = a + (r - a)\frac{b_1}{b_1 - 1} \qquad \text{Ecuación 20}$$

Para graficar las diferencias, se recurre al ejemplo presentado antes para relacionar el valor de la opción resultante de aplicar el criterio de tasa de corte a distintos niveles, entre los que se incluirá la regla óptima o tasa óptima de corte de acuerdo a (20). En la tabla, se puede advertir que con la regla del Valor Actual Neto (V_A =I = 1), la tasa de corte coincide con la tasa de descuento. Para captar la totalidad del valor de la opción de diferir, la tasa de corte óptima debiera ser del 22%. Lógicamente, con tasas de corte elevadas muy por encima de la tasa de descuento del proyecto, se capta parte del valor de la opción de diferir. Las posturas excesivamente conservadoras de los inversores, conllevan la ventaja de captar el valor de la opción de diferir el proyecto cuando esta existe verdaderamente.

Regla: Valor "disparador" del negocio (trigger value)	Tasa de corte correspondiente al Valor disparador (hurdle rate)
1,000	12%
1,138	14%
1,277	15%
1,415	17%
1,553	19%
1,692	20%
1,830	**22%**
1,968	24%
2,107	25%
2,245	27%
2,383	29%
2,522	30%

4. Comentarios finales

La identificación y valuación de opciones reales en proyectos de inversión pueden explicar una parte significativa de su valor. En estos casos, las decisiones basadas en reglas que contemplan flexibilidades del proyecto debieran conducir a mejores resultados en relación aquellas que omiten considerarlas. No obstante, el uso de reglas arbitrarias como la tasa de corte puede conducir a decisiones similares a las que se obtendrían con modelos más sofisticados. Las posturas excesivamente conservadoras al penalizar proyectos de inversión irreversibles, implícitamente reconocen valor a la opción de diferir su iniciación.

REFERENCIAS

Brennan M. y Trigeorgis L., Project Flexibility, Agency and Competition, *New Developments in the Theory and Applications of Real Options*, cap.1 y 2, Oxford University Press, 2000

Chiang Alpha, *Métodos fundamentales de economía matemática*, McGraw Hill, 3ª Ed, 1987

Copeland T., Weston F. y Shastri K., *Financial Theory and Corporate Policy*, 4th Ed, Pearson Addison–Wesley Series in Finance, 2003

Dixit Avinash and Pindyck Robert, *Investment under Uncertainty*, Princeton University Press, 1994